



DINÁMICA

DE ESTRUCTURAS

TEXTO DE APOYO A LA DOCENCIA

Autor:
Dr. Patricio Cendoya Hernández

AÑO: 2022

DINÁMICA DE ESTRUCTURAS
PARTRICIO CENDOYA HERNÁNDEZ

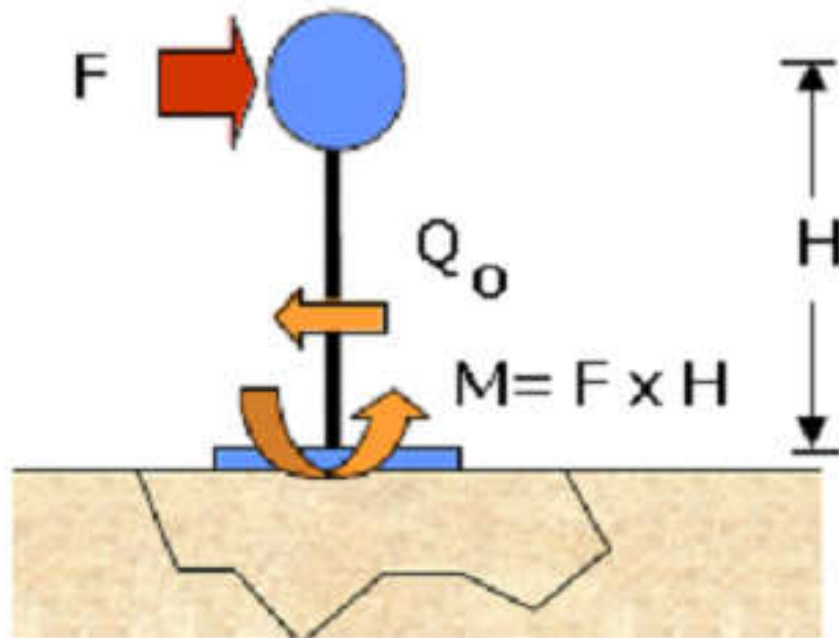
Registro de Propiedad Intelectual N° 172.251

I.S.B.N. 978-956-8029-81-4

Tercera Edición 2022

Prohibida la reproducción total o parcial de esta obra
©UNIVERSIDAD DE CONCEPCION

DINAMICA DE ESTRUCTURAS



Dr. Patricio Cendoya Hernández

2022

INDICE DE CONTENIDOS

CAPÍTULO 1	CONCEPTOS BASICOS	1
1.1	Introducción.....	1
1.2	Grados de libertad.....	2
1.3	Modelo mecánico	3
1.4	Rigidez horizontal equivalente	7
1.5	Metodo de la rigidez basal	11
1.6	Matriz de rigidez horizontal	14
CAPÍTULO 2	ECUACION DE MOVIMIENTO	17
2.1	Introducción.....	17
2.2	Ecuación básica	17
2.3	Oscilación libre no amortiguada.....	21
2.4	Oscilación forzada no amortiguada	26
2.5	Oscilación libre amortiguada	30
2.6	Amortiguamiento critico.....	32
2.7	Amortiguamiento supercritico	33
2.8	Amortiguamiento sub-critico.....	34
2.9	Conceptos básicos de disipación de energía	37
2.10	Oscilación forzada no amortiguada con carga constante41¡Error! Marcador no definido.	
2.11	Oscilación forzada amortiguada	44
2.12	Aislamiento de vibraciones: respuesta al movimiento de la base	49
CAPÍTULO 3	EXITACION ARBITRARIA	53
3.1	Introducción	53
3.2	Respuesta a movimientos sísmicos.....	53

3.3	Oscilación forzada bajo cargas armónicas	55
3.4	Espectro de respuesta sísmica	58
3.5	Integración directa de la ecuación de movimiento.....	64
3.6	Solución explícita	65
3.7	Solución implícita	67
CAPÍTULO 4 APLICACIONES A SISTEMAS DE UN GRADO DE LIBERTAD.....		73
4.1	Introducción.....	73
4.2	Ejemplos de aplicación	73
4.2.1	Marco sometido a carga impulsiva rectangular	73
4.2.2	Marco sometido a excitación basal	77
4.2.3	Marco sometido a carga impulsiva triangular	81
4.2.4	Marco sometido a carga armónica	84
4.2.5	Máquina conectada a pared rígida	86
CAPÍTULO 5 SISTEMAS DE N GRADOS DE LIBERTAD		89
5.1	Introducción.....	89
5.2	Ecuaciones de movimiento	89
5.3	Propiedades de ortogonalidad	97
5.4	Análisis modal	100
5.5	Normalización de ecuaciones	103
5.6	Métodos de superposición modal	108
5.7	Efecto del amortiguamiento	112
CAPÍTULO 6 APLICACIONES A SISTEMAS DE N GRADOS DE LIBERTAD		119
6.1	Introducción.....	119
6.2	Ejemplos de aplicación	119
6.2.1	Estimación del drift en marco de dos pisos	119
6.2.2	Respuesta espectral CQC en marco de dos pisos	125

6.2.3	Respuesta analítica en marco de dos pisos	131
6.2.4	Verificación de propiedades de ortogonalidad de modos de vibrar....	134
6.2.5	Respuesta analítica en marco de dos pisos	135
6.2.6	Respuesta espectral CQC en marco de tres pisos.....	138
6.2.7	Cálculo de matriz de amortiguamiento tipo Rayleigh	143
6.2.8	Respuesta espectral de acuerdo a NCh433	148
CAPÍTULO 7 ANÁLISIS PSEUDO TRIDIMENSIONAL		159
7.1	Introducción.....	159
7.2	Grados de libertad por piso.....	159
7.3	Matriz de rigidez	162
7.4	Edificios con elementos de rigidez proporcional	169
7.5	Matriz de rigidez con respecto a ejes principales	170
7.6	Matriz de masa concentrada.....	182
7.7	Ejemplos de aplicación	183
7.7.1	Cálculo de matriz de masa	184
7.7.2	Estimación del centro de masa en estructura asimétrica	189
7.7.3	Propiedades dinámicas de edificio de dos pisos	194
CAPÍTULO 8 ANÁLISIS PSEUDO TRIDIMENSIONAL		203
8.1	Introducción.....	203
8.2	Propiedades y características dinámicas	203
8.3	Método de Rayleigh	210
8.4	Ejemplo de aplicación	212
REFERENCIAS		217

CAPITULO 1

CONCEPTOS BASICOS

1.1 Introducción

La dinámica de estructuras es aquella parte de la mecánica aplicada que desarrolla métodos para el estudio del comportamiento de estructuras sujetas a la acción de vibraciones. El estudio de la dinámica de los cuerpos deformables, puede realizarse desde dos enfoques: uno denominado determinista en el cual a través de las ecuaciones de la mecánica clásica aplicada sobre un modelo estructural continuo o discreto se obtiene la solución analítica o numérica a las ecuaciones que gobiernan el problema. Otro enfoque es el denominado no-determinista (estocástico-aleatorio) que toma en cuenta la aleatoriedad de las cargas y del comportamiento mecánico de los materiales, dicho enfoque no se aborda en estos apuntes, siendo este último el más próximo a la realidad en el caso sísmico.

Una carga estática es aquella cuyo valor no cambia con el tiempo. Un ejemplo de carga estática lo representan las cargas muertas o permanentes (por ejemplo el peso propio de la estructura) ya que estas permanecen constantes con el paso del tiempo. Una carga o excitación dinámica es aquella cuya intensidad es función del tiempo, un sismo por ejemplo se puede representar como una fuerza del tipo dinámico, que actúa sobre la estructura durante la duración del movimiento sísmico. Cualquier estructura elástica sujeta a la acción de una carga dinámica se comporta como un sistema oscilante.

Una de las diferencias entre un problema estático y uno dinámico es la variación en el tiempo de la respuesta, lo que hace que el problema dinámico no tenga solamente una solución. Al contrario, el análisis entrega una solución en cada instante de tiempo. Las principales fuentes de fenómenos vibratorios que pueden afectar a las estructuras son entre otros [B-1]:

1. Las maquinarias y las instalaciones cuyo funcionamiento implica la presencia de masas en desequilibrio. Las vibraciones causadas por las maquinarias en funcionamiento afectan principalmente a las estructuras soportantes, a sus

fundaciones y a estructuras y equipos ubicados en las cercanías.

2. Vehículos en movimiento.
3. Sismos, explosiones, viento.

1.2 Grados de libertad

Para poder estimar la respuesta dinámica de una estructura real es necesario aplicar simplificaciones conceptuales para reducirla a una estructura ideal (modelo mecánico) a partir del cual se construye un modelo matemático que describe cuantitativamente la respuesta de la estructura idealizada.

Calcular la respuesta dinámica implica establecer el comportamiento de parámetros relevantes del modelo (desplazamiento, velocidad, aceleración, deformación, tensión, etc.) en cada uno de los puntos de la estructura, es decir, en una infinidad de puntos si se considera el hecho real que esta es un medio continuo.

Dicho de esta forma el problema se transforma en insoluble, para facilitar el cálculo numérico se define un número finito de puntos representativos de la estructura en donde se plantea y formula el problema. Entre los métodos más utilizados para realizar esta operación, se tienen:

1. El método de las masas concentradas
2. El método de los desplazamientos generalizados
3. El método de los elementos finitos

Cada uno de estos métodos se aplica en función del tipo de estructura que se utiliza.

Uno de los métodos más empleados para estimar la respuesta dinámica es el de las masas concentradas, el cual supone que la masa se concentra en una serie de puntos previamente seleccionados, de tal forma que el modelo mecánico resultante sea capaz de proporcionar una descripción aproximada del movimiento de la estructura real. Cada una de las masas concentradas describe el movimiento generado por el efecto de las fuerzas de inercia que aparecen en el modelo mecánico durante su vibración. El número

total de componentes de los desplazamientos en los cuales las masas concentradas vibran con respecto a sus posiciones originales, se denomina número de grados de libertad dinámica del modelo.

El número de grados de libertad dinámica de una estructura, se puede también definir como el número mínimo de desplazamientos que se tienen que conocer para definir por completo la deformada de la estructura en cada instante durante su vibración.

Una vez obtenida la deformada de la estructura en cada instante del movimiento, es decir, la descripción de los desplazamientos es posible conocer las deformaciones, tensiones y esfuerzos que se desarrollan en la estructura en el tiempo. La identificación de los grados de libertad dinámica de una estructura necesita mucha rigurosidad, ya que tiene gran influencia sobre el resultado del cálculo dinámico.

El método de las masas concentradas, resulta eficaz en aquellas estructuras en las cuales una gran parte de su masa está realmente concentrada en puntos discretos.

1.3 Modelo Mecánico

En el caso de cargas horizontales sobre estructuras formadas por marcos rígidos, antes de construir un modelo idealizado de la estructura real, es necesario introducir algunas hipótesis de comportamiento, en primer lugar se debe considerar que las columnas desarrollan deformaciones axiales muy pequeñas, que permiten que estas puedan ser despreciadas. En segundo lugar, a nivel de cielo se considera la existencia de un diafragma horizontal (correspondiente a pisos o techos de edificios) los cuales aparte de resistir solicitaciones verticales de peso propio y sobrecargas, pueden resistir fuerzas horizontales de inercia y transmitir las a las subestructuras verticales (muros de corte, columnas) conectadas a ellos.

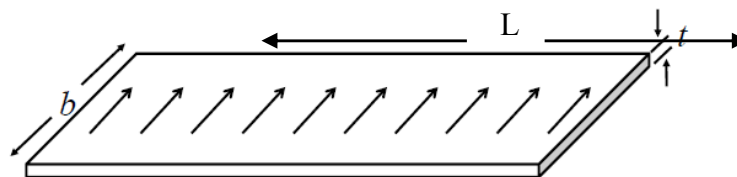


Figura 1.1. Diafragma horizontal y carga en dirección horizontal

Un diafragma es considerado rígido (DR) cuando dispone de la rigidez y resistencia que le permite actuar como una unidad, siendo su deformación en su plano despreciable y dejando solo posible la traslación horizontal y la rotación respecto al eje vertical como posibilidades de movimiento. Cuando un diafragma horizontal es rígido, se produce compatibilidad de desplazamientos de los elementos verticales conectados a él. Por otro lado, un diafragma es considerado flexible (DF) cuando existen deformaciones diferenciales en el plano, en este caso cada nodo contenido en el diafragma, puede desplazarse y girar en forma en diferente.

Según la ASCE (asociación americana de ingenieros civiles), una losa se comporta como DF cuando la máxima deformación horizontal del diafragma (MDD), es mayor que dos veces el promedio de la deformación de las subestructuras verticales del piso inmediatamente inferior (ADVE), y como rígido si este valor es inferior a dos (Figura 1.2). Para estructuras con una relación de aspecto en planta menor o igual a 1:3 sin presencia de irregularidades en planta es posible establecer directamente ese diafragma como rígido sin realizar en análisis de índice de flexibilidad.

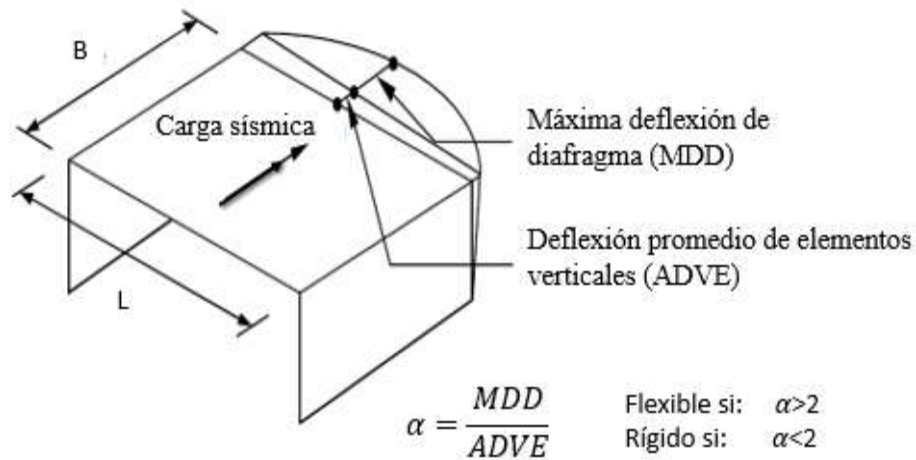


Figura 1.2. Clasificación de diafragma según ASCE.

Considerando las hipótesis anteriores, es posible construir un modelo mecánico para idealizar el comportamiento de una estructura con DR.

Considérese el marco de la Figura 1.3, en este caso la deformación axial de las columnas ($D_2 = D_5 = 0$) se desprecia y la hipótesis de DR impone compatibilidad de desplazamientos horizontales ($D_1 = D_4 = D$ y $D_3 = D_6 = 0$), quedando la posición de la masa concentrada en cualquier instante del tiempo definida por una única coordenada $D = D(t)$ que corresponde al desplazamiento horizontal del DR.

Sumado a lo anterior la rigidez horizontal de las columnas se puede idealizar, por su rigidez equivalente y la masa del sistema se puede concentrar al nivel de DR.

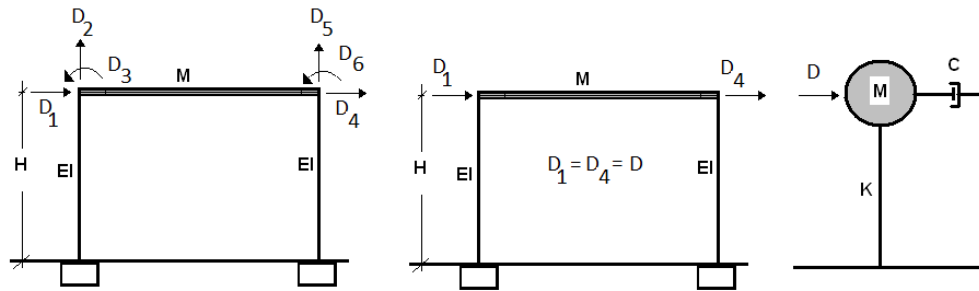


Figura 1.3. Modelo mecánico de un sistema de un grado de libertad.

El procedimiento anterior se denomina Condensación Estática y permite obtener la matriz de rigidez utilizada en el análisis dinámico a partir de matriz completa correspondiente al análisis estático $\underline{K}$, dado que los grados de libertad totales $\underline{D}$ del modelo incluyen a los grados de libertad dinámicos. En resumen los modelos dinámicos necesitan de menos grados de libertad que los estáticos.

Una forma alternativamente al modelo de péndulo invertido indicado en la Figura 1.3, corresponde al de un carro con ruedas sin roce con el suelo, de masa m y con un resorte sin masa de rigidez horizontal K conectado a una pared fija, tal como se indica en Figura 1.4.

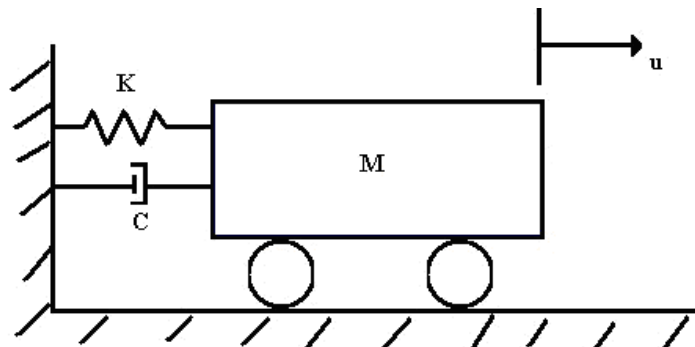


Figura 1.4. Modelo mecánico de un sistema de un grado de libertad.

1.4 Rigidez horizontal equivalente

En una columna de sección constante que sufre un desplazamiento horizontal Δ_i sin giro de nudos y que se deforma solo por flexión con base empotrada la rigidez horizontal vale:

$$K_i = 12 \frac{EI}{H^3}, \quad (1.1)$$

Físicamente K_i representa la fuerza horizontal necesaria que hay que aplicar a nivel de diafragma horizontal rígido en la dirección horizontal para producir un desplazamiento unitario $\Delta_i = 1$, sin giro en el nudo que conecta la columna con el diafragma. En el caso que la no existiera empotramiento, si no que la base de la columna estuviera con un apoyo fijo la rigidez lateral K_i de la columna i se reduce a:

$$K_i = 3 \frac{EI}{H^3}, \quad (1.2)$$

Recordemos que un DR aparte de resistir solicitaciones verticales de peso propio y sobrecargas transmite la fuerza de inercia del diafragma horizontal a las subestructuras verticales, imponiendo igualdad de deformaciones y generando fuerzas de corte proporcionales a la rigidez horizontal de cada una de las subestructuras verticales conectadas a ella.

En el caso particular del marco plano de la Figura 1.5, a nivel del DR se impone compatibilidad de desplazamientos horizontales de los extremos de las columnas, es decir:

$$\Delta_1 = \Delta_2 = \dots = \Delta_n = \Delta, \quad (1.3)$$

Por equilibrio de fuerzas horizontales y considerando una relación constitutiva elástica-lineal, para la relación fuerza-desplazamiento, se tiene:

$$F = F_1 + F_2 + \dots + F_n = \sum F_i , \quad (1.4)$$

$$F_i = K_i \cdot \Delta_i , \quad (1.5)$$

Reemplazando las ecuaciones constitutivas (1.5) y de compatibilidad de desplazamientos (1.3), en la ecuación de equilibrio (1.4), se tiene:

$$F = [K_1 + K_2 + \dots + K_n] \cdot \Delta = K \cdot \Delta , \quad (1.6)$$

$$K = \sum_{i=1}^n K_i , \quad (1.7)$$

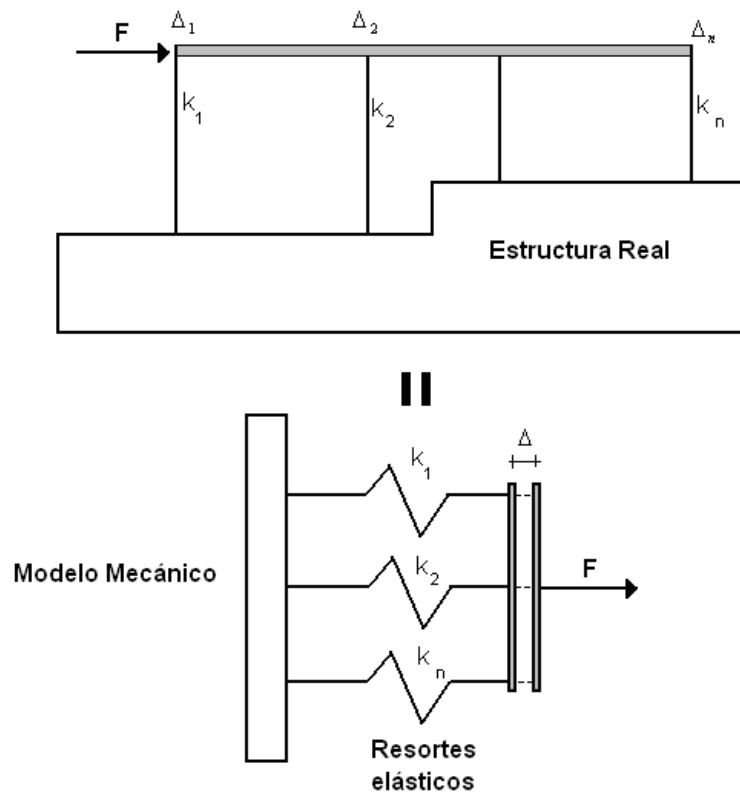


Figura 1.5. Modelo de resortes elásticos en paralelo.

Siendo K la rigidez lateral equivalente del sistema, es decir, la estructura se puede modelar como si se tratase de un sistema eléctrico en paralelo. Cuando los resortes se disponen en serie, la constante del resorte equivalente se estima por:

$$\frac{1}{K} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{K_i} \quad (1.8)$$

Por ejemplo, la estructura de la Figura 1.6, puede modelarse como un sistema mecánico de un grado de libertad con una rigidez equivalente de piso igual a:

$$K = 3 \cdot \frac{EI_1}{3^3} + 12 \cdot \frac{EI_2}{4^3} + 3 \cdot \frac{EI_3}{3^3}, \quad (1.9)$$

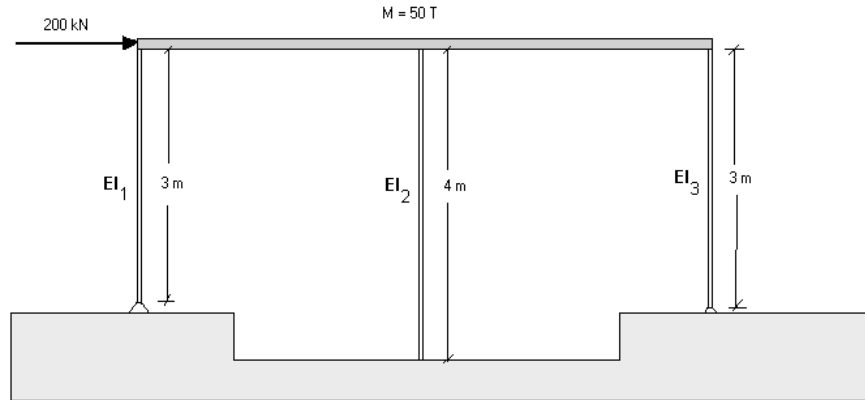


Figura 1.6. Estructura de un grado de libertad

Veamos la siguiente situación, considérense tres marcos planos rígidos todos de igual masa y con columnas con igual EI , pero con distintas condiciones de vinculación con la base, ver Figura 1.7. La rigidez horizontal para cada caso, vale:

1. Marco con ambas columnas empotradas: $K_1 = 24 \frac{EI}{H^3}$
2. Marco con una columna empotrada y la otra con apoyo fijo: $K_2 = 15 \frac{EI}{H^3}$
3. Marco con ambas columnas con apoyos fijos: $K_3 = 6 \frac{EI}{H^3}$

Graficando las relaciones F vs. u (fuerza vs. desplazamiento lateral), se concluye que para una carga horizontal aplicada a nivel del diafragma horizontal rígido, el marco con columnas empotradas se desplaza una cantidad u_1 , mientras que el marco con una columna empotrada se desplaza una cantidad u_2 y el marco con ambas columnas con

apoyos fijos se deslaza una cantidad u_3 , es decir:

$$u_1 < u_2 < u_3 \text{ Puesto que } K_1 > K_2 > K_3, \quad (1.10)$$

Es decir, el marco más rígido se deslaza menos para la misma carga horizontal, verificándose que el desplazamiento horizontal es inversamente proporcional a la rigidez lateral del marco.

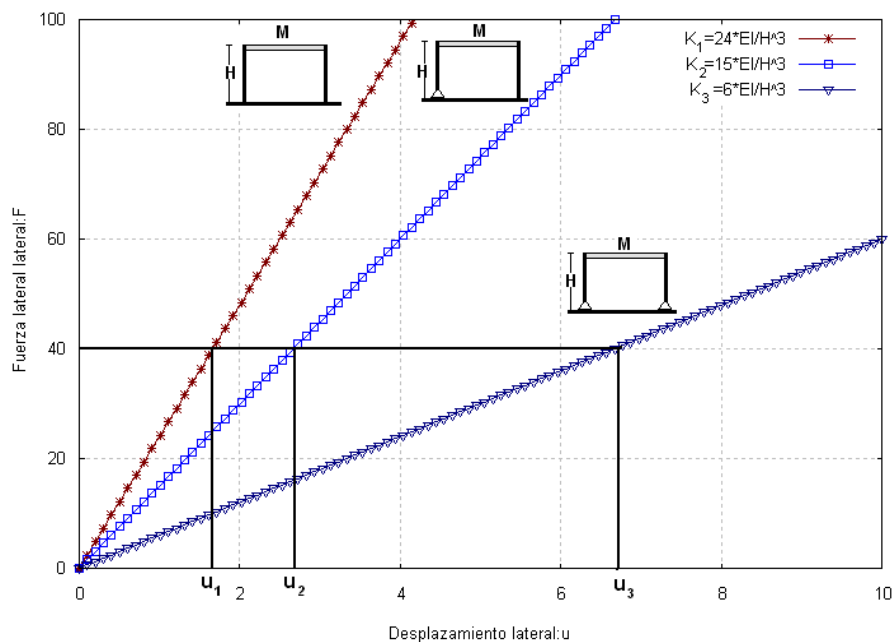


Figura 1.7. Influencia de la rigidez horizontal equivalente en el movimiento lateral del marco.

1.5 Método de la rigidez basal

Para el diseño estructural, no solo es necesario conocer el desplazamiento que experimenta el diafragma horizontal y ver si este cumple con los desplazamientos límites definidos por la respectiva norma, sino que, también interesa saber cuánta fuerza de

corte toma cada una de las columnas del marco.

Para poder definir el valor de las fuerzas de corte que toma cada una de las columnas analicemos las ecuaciones de equilibrio (1.11), constitutivas (1.12 y 1.13) y de compatibilidad de desplazamientos (1.14) para un marco simple, tal como el de la Figura 1.8:

$$F = F_1 + F_2 , \quad (1.11)$$

$$F_1 = k_1 \cdot u_1 , \quad (1.12)$$

$$F_2 = k_2 \cdot u_2 , \quad (1.13)$$

$$u_1 = u_2 = \Delta , \quad (1.14)$$

Reemplazando (1.12), (1.13) y (1.14) en (1.11) se tiene:

$$F = F_1 + F_2 = k_1 \cdot u_1 + k_2 \cdot u_2 = [k_1 + k_2] \cdot \Delta \Rightarrow \Delta = \frac{F}{[k_1 + k_2]} , \quad (1.15)$$

Sustituyendo el valor del desplazamiento horizontal del diafragma (1.15), en (1.12) y (1.13) se llega a la fuerza de corte que toma cada columna:

$$F_1 = k_1 \cdot u_1 = k_1 \cdot \Delta = \frac{k_1}{[k_1 + k_2]} \cdot F , \quad (1.16)$$

$$F_2 = k_2 \cdot u_2 = k_2 \cdot \Delta = \frac{k_2}{[k_1 + k_2]} \cdot F , \quad (1.17)$$

Luego cada columna toma una fuerza de cortante proporcional a su rigidez, es decir, la columna con mayor rigidez toma más carga.

$$F_i = \frac{k_i}{\sum_{i=1}^n k_i} \cdot F, \quad (1.18)$$

Por equilibrio de fuerzas horizontales, se tiene:

$$F = F_1 + F_2 = Q_b, \quad (1.19)$$

Siendo Q_b el corte basal (o fuerza resultante que hay a nivel de la base de las columnas).

$$k_1 = 12 \frac{EI}{H^3}, \quad (1.20)$$

$$k_2 = 12 \frac{EI}{\left[\frac{H}{2}\right]^3} = 96 \frac{EI}{H^3} = 8 \cdot k_1, \quad (1.21)$$

De ecuación (1.18), se tiene:

$$F_1 = \frac{k_1}{k_1 + k_2} \cdot Q_b = \frac{Q_b}{9}, \quad (1.22)$$

$$F_2 = \frac{k_2}{k_1 + k_2} \cdot Q_b = \frac{8}{9} \cdot Q_b, \quad (1.23)$$

En este caso la columna más rígida ($k_2 > k_1$) toma 8 veces la fuerza de corte que toma la columna más flexible. Lo anterior nos debe hacer reflexionar, que teniendo ambas

columnas igual EI , el hecho que una sea más corta que la otra, la transforma en más rígida y hace que se lleve el 88.9% del cortante basal.

Un buen diseño sismo resistente debe considerar esta distribución de esfuerzos para evitar modos de falla indeseables (columna corta).

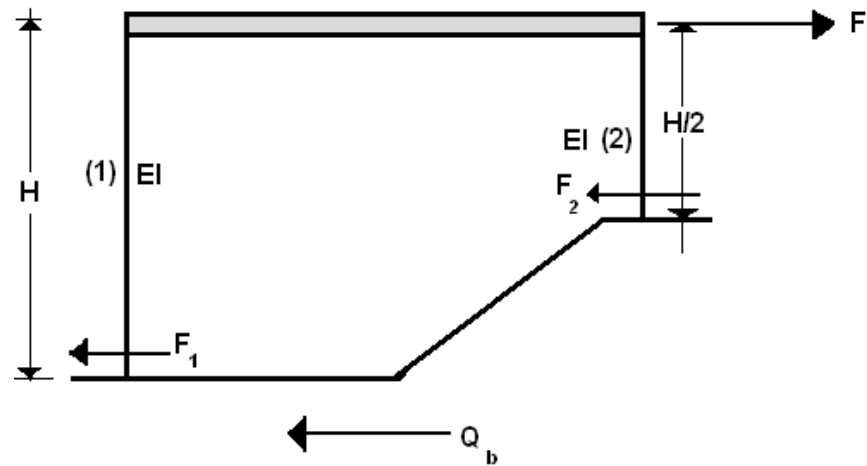


Figura 1.8. Marco plano con columnas de diferente rigidez al corte.

1.6 Matriz de rigidez horizontal

En el caso de estructuras de n grados de libertad, tal como la indicada en la Figura 1.9, es necesario construir la matriz de rigidez horizontal del sistema.

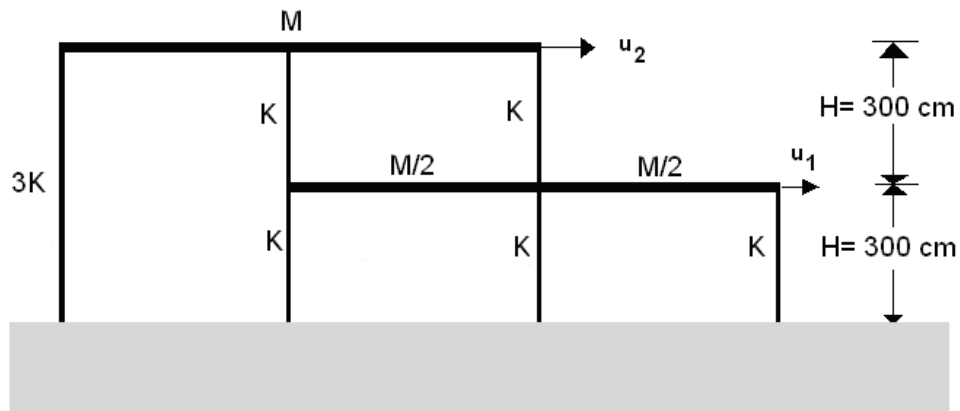


Figura 1.9. Marco plano de dos pisos con DR a nivel de los pisos.

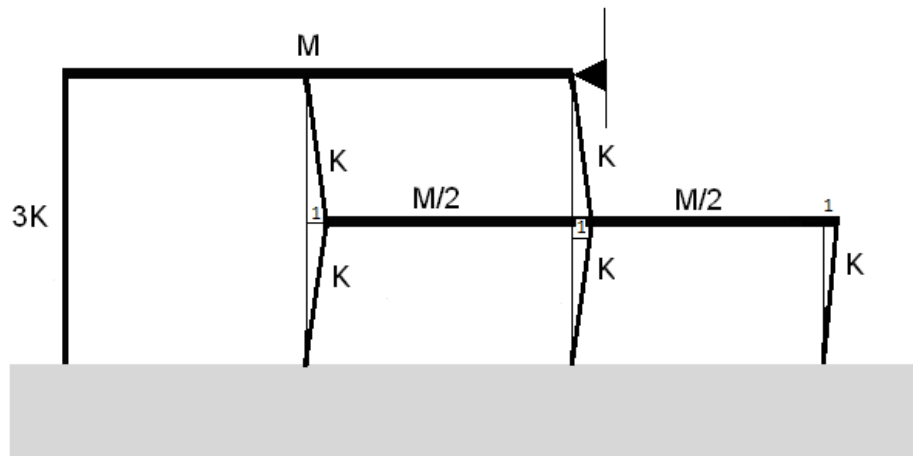


Figura 1.10. Calculo de K_{11} y K_{21} ($u_1 = 1 ; u_2 = 0$).

$$K_{11} = K + K + K + K + K = 5K , \quad (1.24)$$

$$K_{21} = -K - K = -2K , \quad (1.25)$$

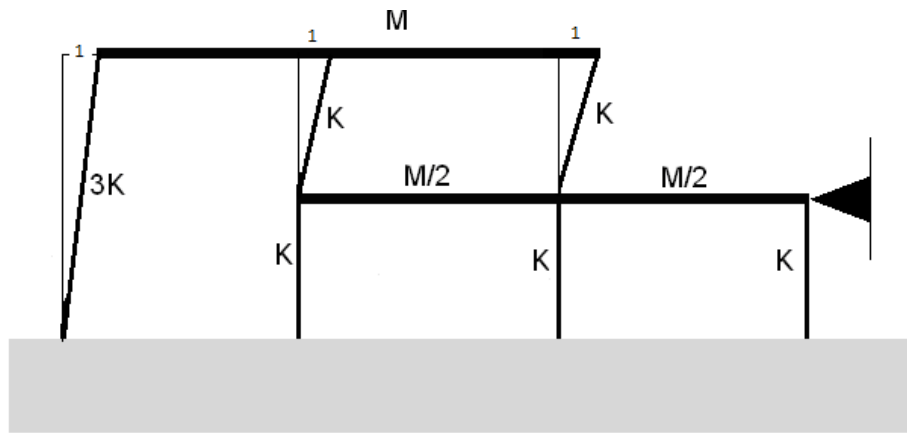


Figura 1.10. Calculo de K_{22} y K_{12} ($u_1 = 0 ; u_2 = 1$).

$$K_{22} = 3K + K + K = 5K , \quad (1.24)$$

Obteniéndose para la estructura de la Figura 1.9:

$$\underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix} 5K & -2K \\ -2K & 5K \end{bmatrix}, \quad (1.25)$$

CAPITULO 2

ECUACION DE MOVIMIENTO

2.1 Introducción

En este capítulo se presentan las ecuaciones que gobiernan el comportamiento dinámico de un sistema elástico de un grado de libertad, al igual que su solución analítica para distintos tipos de cargas externas (constantes, armónicas, impulsivas y sísmicas):

2.2 Ecuación básica

El movimiento de la estructura idealizada como un sistema de un grado de libertad (Figura 2.1) sometida a cargas dinámicas se rige por una ecuación diferencial, la cual se obtiene utilizando el principio de D'Alembert, el cual plantea: "El equilibrio dinámico del sistema queda garantizado, si en cada instante todas las fuerzas que actúan sobre el sistema, incluso las fuerzas de inercia (ficticia), están en equilibrio estático" [B-2].

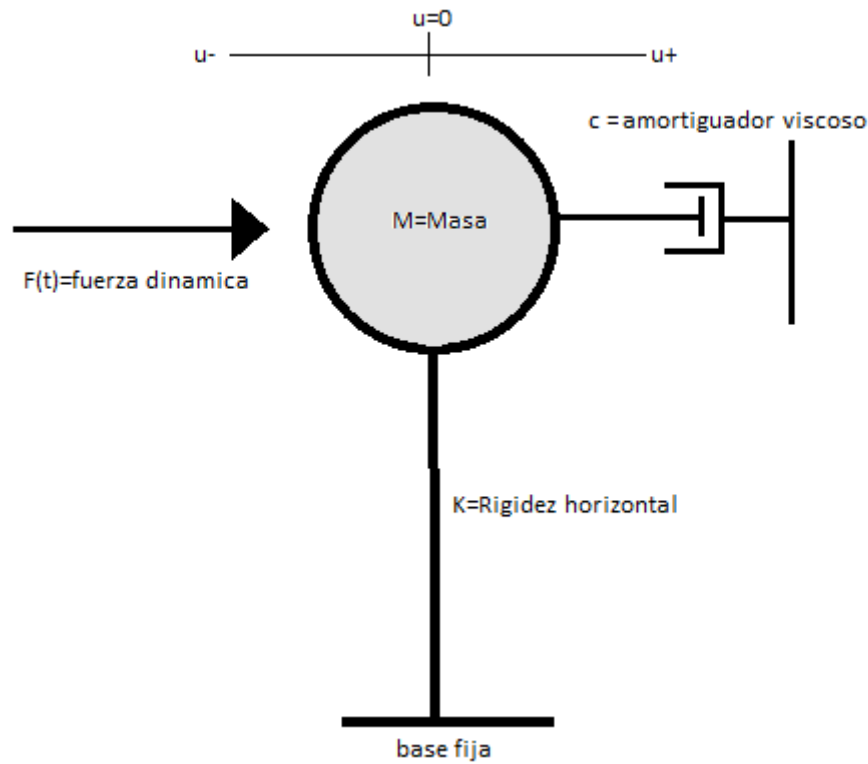


Figura 2.1. Modelo mecánico de un sistema de un grado de libertad sometido a una carga horizontal dinámica.

Cuando al sistema de un grado de libertad se le aplica una carga externa dinámica $F(t)$, la masa sufre un desplazamiento lateral $u(t)$ el cual representa la deformación de la estructura de un grado de libertad. Puesto que la fuerza externa varía con el tiempo, el desplazamiento también cambiará en el tiempo.

Las fuerzas involucradas en el equilibrio del sistema son: la fuerza externa $F(t)$, la fuerza elástica resistente $F_E(t)$ que es la fuerza que las columnas ejercen sobre la masa cuando ésta se mueve, la fuerza de amortiguamiento $F_A(t)$ que es la fuerza que ejerce el amortiguador sobre la masa y la fuerza de inercia $F_I(t)$.

De acuerdo a la segunda ley de Newton, la fuerza de inercia que se desarrolla en la masa m es directamente proporcional a la aceleración total de la misma, es decir:

$$F_I(t) = m \cdot \ddot{u}(t) , \quad (2.1)$$

La fuerza de amortiguamiento viscoso se determina a través de la ley de Voigt:

$$F_A(t) = c \cdot \dot{u}(t) , \quad (2.2)$$

Donde c es el coeficiente de amortiguamiento viscoso y $\dot{u}(t)$ es la velocidad relativa de la masa con respecto al suelo. A grandes rasgos, el amortiguamiento se puede definir como el proceso por el cual cierta porción de energía en un sistema vibratorio se pierde irreversiblemente causando la decaída en la respuesta del sistema.

Para un sistema lineal la fuerza elástica resistente está dada por la ley de Hooke:

$$F_E(t) = k \cdot u(t) , \quad (2.3)$$

Donde k es la rigidez horizontal del sistema y $u(t)$ es el desplazamiento relativo entre la masa y el suelo.

Substituyendo las fuerzas $F_I(t)$, $F_A(t)$, $F_E(t)$ en la ecuación de equilibrio dinámico, se obtiene:

$$m \cdot \ddot{u}(t) + c \cdot \dot{u}(t) + k \cdot u(t) = F(t) , \quad (2.4)$$

Ecuación diferencial ordinaria no homogénea, lineal de coeficientes constantes m, c y k y de segundo orden. Para que la solución numérica o analítica de la ecuación quede definida en el dominio del tiempo, es necesario definir dos condiciones iniciales, una asociada a los desplazamientos y otra asociada a las velocidades.

En el caso de una excitación sísmica, no existe una fuerza externa aplicada directamente sobre la masa, sino que la única sollicitación al sistema es la debida a la aceleración del suelo (ver Figura 2.2) sobre el cual se encuentra la estructura. Como resultado de esta excitación la base de la estructura tiene una aceleración $a_g(t)$ y a su vez la estructura se deforma en una cantidad $u(t)$.

El equilibrio dinámico impone que:

$$m \cdot [\ddot{u}(t) + a_g(t)] + c \cdot \dot{u}(t) + k \cdot u(t) = 0, \quad (2.5)$$

$$m \cdot \ddot{u}(t) + c \cdot \dot{u}(t) + k \cdot u(t) = F(t) = -m \cdot a_g(t), \quad (2.6)$$

Siendo esta la ecuación del movimiento que gobierna la respuesta de un sistema de un grado de libertad amortiguado sometido a un movimiento sísmico.

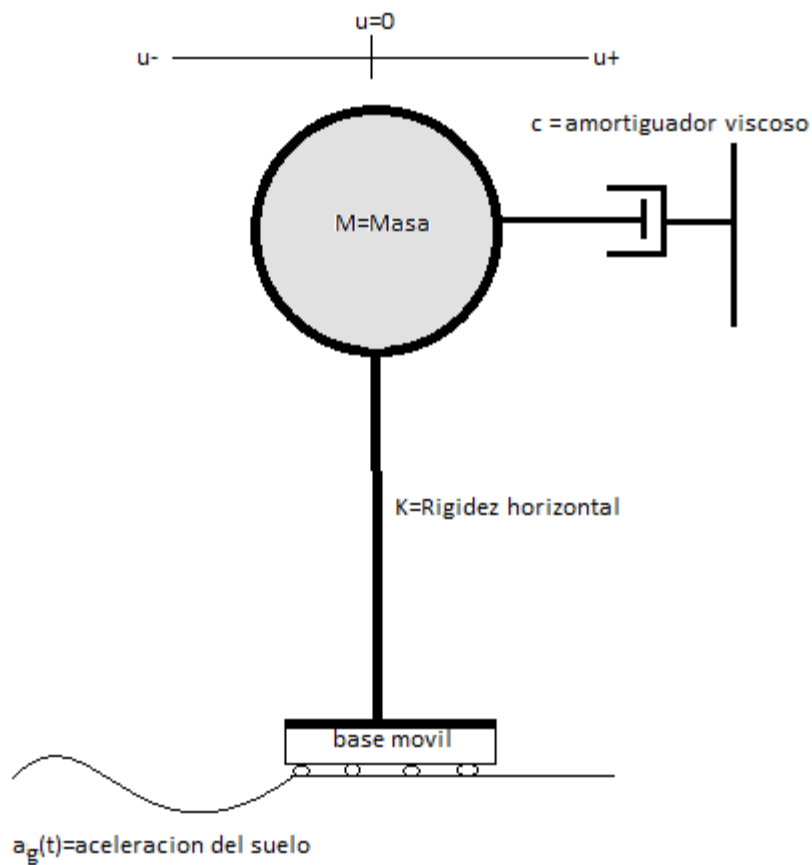


Figura 2.2. Modelo mecánico de un sistema de un grado de libertad sometido a una carga sísmica.

2.3 Oscilación libre no amortiguada

Las características dinámicas de un sistema estructural de un solo grado de libertad se definen analizando la vibración libre no amortiguada. La ecuación de movimiento correspondiente a este caso (sistema conservativo) se obtiene directamente despreciando los términos asociados a la excitación externa $F(t)$ y la fuerza de amortiguamiento viscoso en (2.4), resultando:

$$m \cdot \ddot{u}(t) + k \cdot u(t) = 0, \quad (2.7)$$

Dividiendo por la masa de la estructura, resulta:

$$\ddot{u}(t) + \frac{k}{m} \cdot u(t) = 0, \quad (2.8)$$

$$\frac{k}{m} = \omega^2, \quad (2.9)$$

Donde se define ω , como la frecuencia fundamental del sistema:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{k \cdot g}{W}}, \quad (2.10)$$

La solución general de esta ecuación corresponde a una vibración sinusoidal del tipo:

$$u(t) = C_1 \cdot \cos(\omega \cdot t) + C_2 \cdot \text{sen}(\omega \cdot t), \text{ o} \quad (2.11)$$

$$u(t) = C \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \gamma), \quad (2.12)$$

Donde C corresponde a la amplitud del movimiento, γ es el ángulo de desfase y C_1 , C_2 son constantes de integración. Considerando condiciones iniciales, asociadas al desplazamiento $u(t=0) = u_0$ y velocidad $\dot{u}(t=0) = \dot{u}_0$ que origina el movimiento, es posible definir los valores de dichas constantes.

$$u(t) = u_0 \cdot \cos(\omega \cdot t) + \frac{\dot{u}_0}{\omega} \cdot \text{sen}(\omega \cdot t), \quad (2.13)$$

$$u(t) = C \cdot \text{sen}[\omega \cdot t + \gamma] = \sqrt{u_0^2 + \left[\frac{\dot{u}_0}{\omega}\right]^2} \cdot \text{sen}[\omega \cdot t + \gamma], \quad (2.14)$$

$$\tan \gamma = \frac{\omega \cdot u_0}{\dot{u}_0}, \quad (2.15)$$

Matemáticamente el periodo natural de vibración de un sistema no amortiguado se define por:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \text{ o } f = \frac{1}{T}, \quad (2.16)$$

Para tener una idea intuitiva del significado del periodo de vibración, sea Δ la deformación estática de una estructura de un grado de libertad asociada a una fuerza lateral igual a su peso, en la dirección en que puede deformarse (grado de libertad), ver Figura 2.3.:

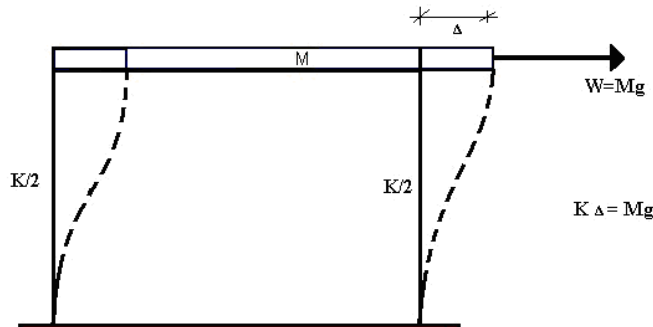


Figura 2.3. Cálculo del periodo.

Por equilibrio de fuerzas horizontales:

$$k \cdot \Delta = M \cdot g \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{M}{k}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\Delta}{g}} \approx 0.2\sqrt{\Delta} , \quad (2.17)$$

Esto permite concluir que las estructuras más deformables ($\Delta >$) tendrán un periodo de vibración más largo que las estructuras menos deformables (rígidas).

Volviendo al problema de vibraciones libres no amortiguadas, sigamos un ciclo de vibración de la estructura de la Figura 2.4, con condiciones iniciales $u(t=0) = 0.05 \text{ m}$

$$\text{y } \dot{u}(t=0) = 0 \frac{m}{s} .$$

$$k_1 = \frac{3 \cdot EI}{L^3} = \frac{3 \cdot 6000}{3^3} = 666,7 \frac{kN}{m} , \quad (2.18)$$

$$k_2 = \frac{12 \cdot EI}{L^3} = \frac{12 \cdot 6000}{3^3} = 2666,7 \frac{kN}{m} , \quad (2.19)$$

$$k = k_1 + k_2 = 3333,4 \frac{kN}{m} , \quad (2.20)$$

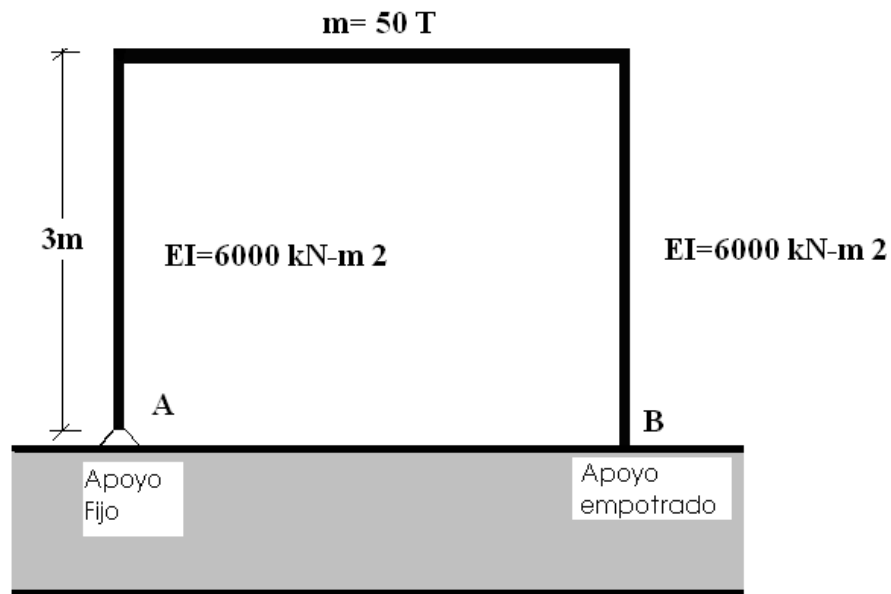


Figura 2.4. Sistema de un grado de libertad.

$$\omega = \sqrt{\frac{3333,4}{50}} = 8,2 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 0,77 \text{ s}, \quad (2.21)$$

$$C = \sqrt{u_0^2 + \left[\frac{\dot{u}_0}{\omega}\right]^2} = \sqrt{0,05^2 + \left[\frac{0,0}{8,2}\right]^2} = 0,05 \text{ m}, \quad (2.22)$$

$$\tan \gamma = \frac{\omega \cdot u_0}{\dot{u}_0} \rightarrow \infty \Rightarrow \gamma \rightarrow \frac{\pi}{2}, \quad (2.23)$$

$$u(t) = 0.05 \cdot \text{sen}[8,2 \cdot t + 90], \quad (2.24)$$

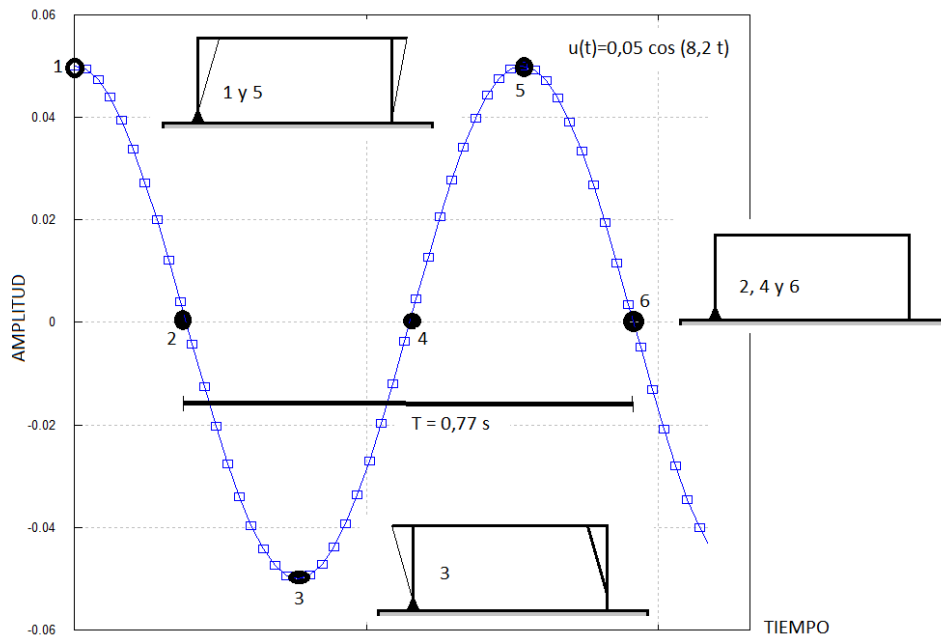


Figura 2.5. Descripción del movimiento del sistema de un grado de libertad.

En la posición inicial (punto 1) el desplazamiento de la masa es 0,05, luego se suelta con velocidad inicial nula y el sistema se desplaza hacia la izquierda, pasando por el punto 2 de amplitud nula y siguiendo hasta alcanzar la amplitud máxima negativa de -0,05 (en el punto 3). Luego del punto 3, se desplaza hacia la derecha pasando por el punto 4 (amplitud nula u origen), para alcanzar la amplitud máxima positiva en el punto 5. Como el sistema no tiene ningún mecanismo de disipación de energía, vibra hasta tiempo infinito. La estructura completa un ciclo de vibración, cuando pasa por los puntos 2, 3, 4, 5 y 6, tardando un tiempo igual al periodo $T = 0.77 \text{ s}$ del sistema.

2.4 Oscilación forzada no amortiguada

Consideremos que no existe amortiguamiento estructural en el sistema y que aplicamos una fuerza del tipo armónica de duración indefinida a nivel del diafragma. La ecuación que describe el movimiento del sistema en este caso, se puede expresar por:

$$m \cdot \ddot{u}(t) + k \cdot u(t) = F(t) = F_0 \cdot \text{sen}(\varpi \cdot t), \quad (2.25)$$

Siendo ϖ la frecuencia de excitación asociada a la fuerza aplicada. La solución al problema tiene dos términos una solución homogénea $u_h(t)$ y otra particular $u_p(t)$:

$$u(t) = u_h(t) + u_p(t) \quad (2.26)$$

La naturaleza de la fuerza externa, sugiere la siguiente solución particular:

$$u_p(t) = A \cdot \text{sen}(\varpi \cdot t), \quad (2.27)$$

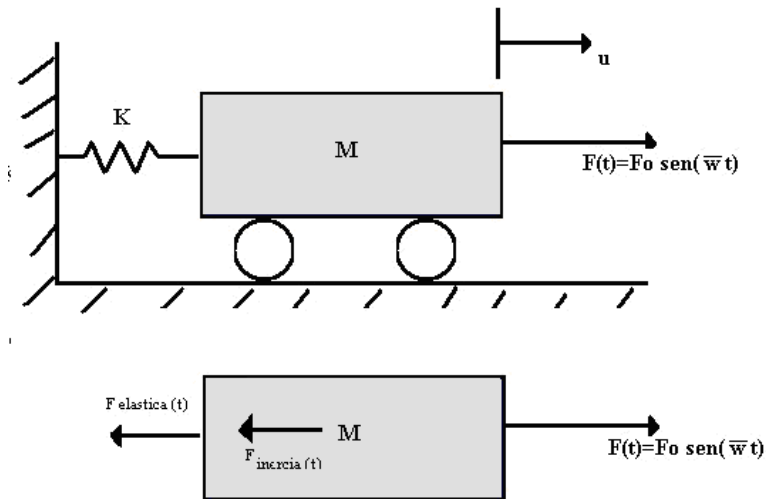


Figura 2.6. Oscilador no amortiguado con fuerza externa armónica.

Sustituyendo en la ecuación de movimiento, se tiene:

$$m[-\varpi^2 A \cdot \text{sen}(\varpi \cdot t)] + k \cdot [A \cdot \text{sen}(\varpi \cdot t)] = F_0 \cdot \text{sen}(\varpi \cdot t), \quad (2.28)$$

$$A = \frac{F_0}{-m \cdot \varpi^2 + k} = \frac{F_0}{k \cdot \left[1 - \frac{\varpi^2}{\omega^2}\right]} = \frac{F_0}{k \cdot (1 - \alpha^2)}, \quad (2.29)$$

Donde $\alpha = \frac{\varpi}{\omega}$, se denomina razón de frecuencias, luego la solución particular:

$$u_p(t) = \frac{F_0}{k \cdot (1 - \alpha^2)} \cdot \text{sen}(\varpi \cdot t) = \frac{\frac{F_0}{k}}{(1 - \alpha^2)} \cdot \text{sen}(\varpi \cdot t) = \frac{u_E}{(1 - \alpha^2)} \cdot \text{sen}(\varpi \cdot t) \quad (2.30)$$

Siendo $u_E = \frac{F_0}{k}$, el correspondiente desplazamiento horizontal estático del péndulo.

Finalmente la respuesta total del sistema puede evaluarse como la suma de la respuesta homogénea más la solución particular, en cualquiera de las dos formas:

$$u(t) = \left[\frac{u_E}{(1 - \alpha^2)} \cdot \text{sen}(\varpi \cdot t) \right] + [C_1 \cdot \text{sen}(\omega \cdot t) + C_2 \cdot \cos(\omega \cdot t)], \quad (2.31)$$

Considerando condiciones iniciales de desplazamiento y velocidad, resulta:

$$u(t) = \left[\frac{u_E}{(1 - \alpha^2)} \cdot (\text{sen}(\varpi \cdot t) - \alpha \cdot \text{sen}(\omega \cdot t)) \right] + \left[\frac{\dot{u}_0}{\omega} \cdot \text{sen}(\omega \cdot t) + u_0 \cdot \cos(\omega \cdot t) \right] \quad (2.32)$$

Considerando condiciones iniciales nulas ($\dot{u}_0 = u_0 = 0$):

$$u(t) = \left[\frac{u_E}{(1 - \alpha^2)} \cdot (\sin(\varpi \cdot t) - \alpha \cdot \sin(\omega \cdot t)) \right], \quad (2.33)$$

En donde la variación del desplazamiento dinámico $u(t)$ lo podemos expresar en función del desplazamiento estático del sistema como:

$$u(t) = FAD \cdot u_E, \quad (2.34)$$

$$FAD = \frac{1}{(1 - \alpha^2)} \cdot (\sin(\varpi \cdot t) - \alpha \cdot \sin(\omega \cdot t)), \quad (2.35)$$

La variable FAD se define como el Factor de Amplificación Dinámica de la respuesta estática del sistema [C-1], [P-1]:

- Cuando $\alpha \rightarrow 1 \Rightarrow \varpi \cong \omega \Rightarrow FAD \rightarrow \pm\infty$, en este caso “ocurre resonancia”.
- Cuando $\alpha = \frac{\varpi}{\omega} \rightarrow 0 \Rightarrow \varpi \rightarrow 0$ o $\omega \gg \varpi \Rightarrow FAD \rightarrow 0$, obteniéndose la respuesta estática. Es decir, la carga externa se aplica lentamente (periodo muy grande).
- Cuando $\alpha \rightarrow \infty \Rightarrow \varpi \rightarrow \infty \Rightarrow FAD \rightarrow 1$, el oscilador no responde.

Lo anterior reafirma el hecho que la estructura se comporta como un filtro de frecuencias, dependiendo su respuesta de la razón de frecuencias α .

2.5 Oscilación libre amortiguada

En este caso la ecuación de movimiento que representa al sistema, se puede escribir como:

$$m \cdot \ddot{u} + c \cdot \dot{u} + k \cdot u = 0, \quad (2.36)$$

En donde c es un coeficiente que representa el amortiguamiento estructural que considera la disipación de energía originada por fricción entre componentes y el contacto intermitente en las conexiones en un sistema mecánico o estructural. La energía disipada depende en detalle del sistema estructural en particular, consecuentemente, es muy difícil desarrollar un modelo analítico generalizado que pueda describirlo. El método más común de estimación de amortiguamiento estructural es a través de la medición, realizando ensayos como el *Pull-Back*, en donde, los valores medidos, representan el amortiguamiento general del sistema.

El modelo de amortiguamiento introducido en (2.36) corresponde a un modelo de amortiguamiento del tipo viscoso, en donde el coeficiente de amortiguamiento estructural es proporcional a la velocidad (Ley de Voigt).

Dividiendo (2.36) por la masa se tiene:

$$\ddot{u} + \frac{c}{m} \cdot \dot{u} + \frac{k}{m} \cdot u = 0, \quad (2.37)$$

Considerando:

$$\frac{c}{m} = 2 \cdot \xi \cdot \omega \quad \text{y} \quad \xi = \frac{c}{c_{cr}} \quad (\text{grado o fracción de amortiguamiento}) \quad \text{con} \quad (2.38)$$

$$0 < \xi < 1$$

En donde el valor crítico del coeficiente de amortiguamiento c_{cr} , se define por:

$$\frac{c}{m} = 2 \cdot \frac{c}{c_{cr}} \cdot \omega \Rightarrow c_{cr} = 2 \cdot m \cdot \omega = 2 \cdot \sqrt{k \cdot m}, \quad (2.39)$$

Luego:

$$\ddot{u} + 2 \cdot \xi \cdot \omega \cdot \dot{u} + \omega^2 \cdot u = 0, \quad (2.40)$$

Suponiendo que la respuesta tiene una forma exponencial, se tiene:

$$u(t) = C \cdot e^{\lambda \cdot t}; \quad \dot{u}(t) = C \cdot e^{\lambda \cdot t} \cdot \lambda \cdot 1 \quad \text{y} \quad \ddot{u}(t) = C \cdot e^{\lambda \cdot t} \cdot \lambda^2 \cdot 1, \quad (2.41)$$

Reemplazando en la ecuación de movimiento (2.40):

$$C \cdot e^{\lambda \cdot t} \cdot [\lambda^2 + 2 \cdot \xi \cdot \omega \cdot \lambda + \omega^2] = 0, \quad (2.42)$$

$$[\lambda^2 + 2 \cdot \xi \cdot \omega \cdot \lambda + \omega^2] = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \omega \cdot \left[-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1} \right], \quad (2.43)$$

La solución general, viene dada por la superposición de las dos soluciones, en donde las constantes de integración C_1 y C_2 son dependientes de las condiciones iniciales:

$$u(t) = C_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} + C_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot t}, \quad (2.44)$$

Dependiendo del valor de ξ , se tiene:

1. $[\xi^2 - 1] < 0 \Rightarrow \xi < 1$. El sistema oscila alrededor de la posición de equilibrio con una amplitud que decrece progresivamente y es denominado amortiguamiento subcrítico.
2. $[\xi^2 - 1] = 0 \Rightarrow \xi = 1$. El sistema retorna a su posición inicial de equilibrio sin oscilar y se denomina amortiguamiento crítico.
3. $[\xi^2 - 1] > 0 \Rightarrow \xi > 1$. El sistema no oscila pero retorna a su posición de equilibrio lentamente y es denominado amortiguamiento supercrítico.

2.6 Amortiguamiento crítico

En este caso las dos raíces de la ecuación característica son iguales:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\xi \cdot \omega = -\omega, \quad (2.45)$$

Para que la solución sea independiente debe tener la siguiente forma:

$$u(t) = C_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} + C_2 \cdot t \cdot e^{\lambda_2 \cdot t} = [C_1 + C_2 \cdot t] \cdot e^{-\omega \cdot t}, \quad (2.46)$$

Imponiendo condiciones iniciales, se obtiene la respuesta de un oscilador con amortiguamiento crítico, notes que resulta ser un movimiento no oscilatorio:

$$u(t) = u_0 \cdot e^{-\omega \cdot t} \cdot [1 - \omega \cdot t] + \dot{u}_0 \cdot t \cdot e^{-\omega \cdot t}, \quad (2.47)$$

Para el ejemplo de la Figura 2.4, la respuesta del sistema considerado condiciones

iniciales $u_0 = 0,01 \text{ m}$, $\dot{u}_0 = -0,03 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ y suponiendo una fracción de amortiguamiento de $\xi = 1,0$ es:

$$u(t) = (0,01 - 0,112 \cdot t) \cdot e^{-8,2t}, \quad (2.48)$$

2.7 Amortiguamiento supercrítico

En este caso, las dos raíces de la ecuación característica son diferentes, obteniéndose:

$$u(t) = C_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + C_2 \cdot e^{\lambda_2 t}, \quad (2.49)$$

Aplicando las condiciones iniciales, se llega a:

$$C_1 = \frac{(u_0 \cdot \lambda_2 + \dot{u}_0)}{\lambda_2 - \lambda_1}, \quad (2.50)$$

$$C_2 = \frac{(u_0 \cdot \lambda_1 + \dot{u}_0)}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad (2.51)$$

Sustituyendo las constantes, se tiene la ecuación de movimiento del sistema sin oscilaciones.

$$u(t) = \left[\frac{u_0 \cdot \lambda_2 + \dot{u}_0}{\lambda_2 - \lambda_1} \right] \cdot e^{\lambda_1 t} + \left[\frac{u_0 \cdot \lambda_1 + \dot{u}_0}{\lambda_1 - \lambda_2} \right] \cdot e^{\lambda_2 t}, \quad (2.52)$$

Para el ejemplo de la Figura 2.4, la respuesta del sistema considerado condiciones iniciales $u_0 = 0,01 \text{ m}$, $\dot{u}_0 = -0,03 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ y suponiendo una fracción de

amortiguamiento de $\xi = 1,2$:

$$u(t) = 0.0172e^{-4.43t} - 0.0072e^{-14.76t}, \quad (2.53)$$

2.8 Amortiguamiento sub-crítico

Este corresponde al caso típico de las construcciones civiles ($0 < \xi < 1$). En este caso las raíces de la ecuación característica son:

$$\lambda_{1,2} = \omega \cdot \left[-\xi \pm i \cdot \sqrt{1 - \xi^2} \right] = \gamma \pm i \cdot \beta, \quad (2.54)$$

La solución general al problema es:

$$u(t) = C_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} + C_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot t} = C_1 \cdot e^{(\gamma + i \cdot \beta) \cdot t} + C_2 \cdot e^{(\gamma - i \cdot \beta) \cdot t}, \quad (2.55)$$

Utilizando las ecuaciones de Euler:

$$e^{i \cdot x} = \cos(x) + i \cdot \operatorname{sen}(x) \text{ y } e^{-i \cdot x} = \cos(x) - i \cdot \operatorname{sen}(x), \quad (2.56)$$

Se llega a la siguiente expresión:

$$u(t) = C_1 \cdot e^{\gamma \cdot t} \cdot [\cos(\beta \cdot t) + i \cdot \operatorname{sen}(\beta \cdot t)] + C_2 \cdot e^{\gamma \cdot t} \cdot [\cos(\beta \cdot t) - i \cdot \operatorname{sen}(\beta \cdot t)] \quad (2.57)$$

La cual se puede reescribir como:

$$u(t) = e^{\gamma t} \cdot [B_1 \cdot \cos(\beta \cdot t) + B_2 \cdot \text{sen}(\beta \cdot t)], \quad (2.58)$$

$$B_1 = C_1 + C_2 \text{ y } B_2 = i \cdot (C_1 + C_2) = i \cdot B_1, \quad (2.59)$$

Sustituyendo $\gamma = -\xi \cdot \omega$ y $\beta = \omega \cdot \sqrt{1 - \xi^2}$ se llega a:

$$u(t) = e^{-\xi \omega t} \cdot [B_1 \cdot \cos[(\omega \cdot \sqrt{1 - \xi^2}) \cdot t] + B_2 \cdot \text{sen}[(\omega \cdot \sqrt{1 - \xi^2}) t]], \quad (2.60)$$

Definiendo la frecuencia amortiguada como:

$$\omega_a = \omega \cdot \sqrt{1 - \xi^2} \Rightarrow T_a = \frac{2 \cdot \pi}{\omega_a} = \frac{T_1}{\sqrt{1 - \xi^2}}, \quad (2.61)$$

Considerando las condiciones iniciales de desplazamiento y velocidad, se llega a:

$$u(t) = e^{-\xi \omega t} \left[u_o \cos(\omega \sqrt{1 - \xi^2} t) + \frac{\dot{u}_o + \xi \omega u_o}{\omega \sqrt{1 - \xi^2}} \sin(\omega \sqrt{1 - \xi^2} t) \right], \quad (2.62)$$

La vibración con amortiguamiento sub-crítico, es la de mayor interés en la dinámica estructural, pues las estructuras reales poseen esta característica.

Para el ejemplo de la Figura 2.4, la respuesta del sistema considerado condiciones iniciales $u_o = 0,01 \text{ m}$, $\dot{u}_o = -0,03 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ y suponiendo una fracción de amortiguamiento de $\xi = 0,10$:

$$u(t) = e^{-0.82t} [0.01 \cdot \cos(8.16t) - 0.0027 \cdot \sin(8.16t)], \quad (2.63)$$

En la Figura 2.7 se presentan las ecuaciones (2.48), (2.53) y (2.63) correspondientes al desplazamiento horizontal del centro de masa del marco de la Figura 2.4 considerando, diferentes fracciones de amortiguamiento.

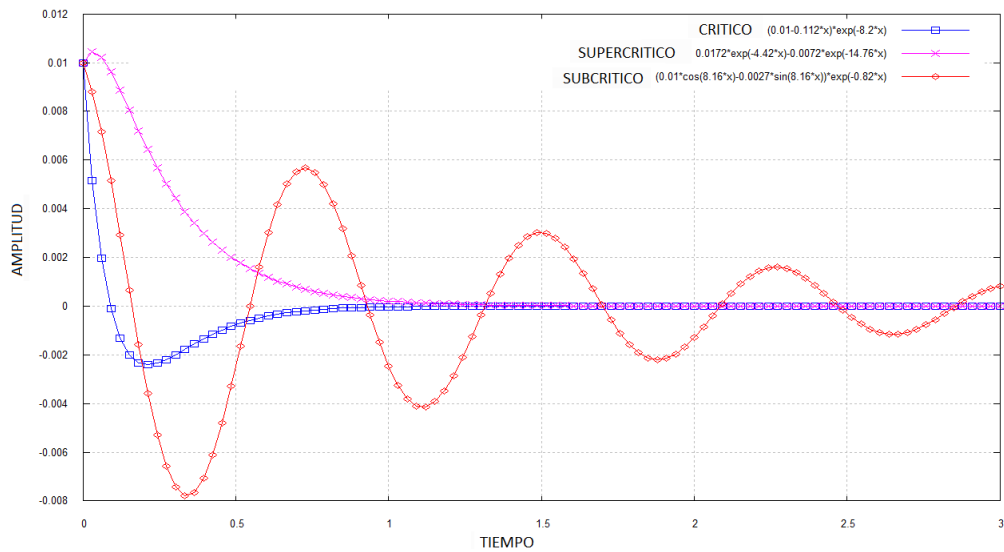


Figura 2.6. Respuesta del sistema estructural de Figura 2.4 considerando diferentes fracciones de amortiguamiento.

Los valores de la fracción de amortiguamiento determinados para distintos tipos de estructuras son muy variados y exhiben una gran dispersión, ver tabla 2.1.

Tabla 2.1: Fracciones del amortiguamiento crítico para diferentes tipos de construcciones

Tipo de Estructura	ξ % de amortiguamiento
Edificios de Acero	2%-5%
Edificios de Hormigón Armado	5%-10%
Construcciones de Albañilería	8%-15%
Construcciones de Madera	10%-15%

Se concluye que estructuras con amortiguamientos menores al crítico, tienen un desplazamiento decreciente en el tiempo.

El amortiguamiento estructural tiende a disminuir a frecuencia circular de vibración, y por lo tanto de alargar el periodo de vibración. Además el aumento del amortiguamiento estructural reduce la amplitud de las vibraciones y por ende disminuye el nivel de daños esperado en ella.

En la mayoría de las estructuras el amortiguamiento crítico varía entre el 2 y 10%, por lo que el periodo amortiguado es entre 0.002 y 1.0050 del periodo natural o no amortiguado. Así pues para la mayoría de las estructuras, se considera que el periodo amortiguado es prácticamente igual al periodo no amortiguado ($T \cong T_a$).

2.9 Conceptos básicos de disipación de energía

Consideremos un sistema conservativo (no existe disipación de energía, $\xi = 0$). En dicho sistema la energía total; suma de la E_K : energía cinética y la E_P : energía potencial, se mantienen constante en todo instante, en este caso se puede demostrar que:

$$E(t) = E_K(t) + E_P(t) = C, \quad (2.64)$$

$$E(t) = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{u}^2 + \frac{1}{2} \cdot k \cdot u^2 = C, \quad (2.65)$$

Cuando:

$$u_{\max} \Rightarrow \dot{u} = 0 \rightarrow E(t) = E_P(t) = \frac{1}{2} \cdot k \cdot u_{\max}^2, \quad (2.66)$$

$$\dot{u}_{\max} \Rightarrow u = 0 \rightarrow E(t) = E_K(t) = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{u}_{\max}^2, \quad (2.67)$$

$$\dot{u}_{\max} = \omega \cdot u_{\max}, \quad (2.68)$$

$$E(t) = C \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot k \cdot u_{\max}^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot [\omega \cdot u_{\max}]^2 \Rightarrow \omega^2 = \frac{k}{m}, \quad (2.69)$$

Consideremos ahora un sistema general (ya no necesariamente elástico) que disipa energía por amortiguamiento viscoso y por histéresis. Si consideramos que actúa una acción sísmica en la base del péndulo, la ecuación de energía puede obtenerse integrando la ecuación de movimiento de un sistema inelástico de un grado de libertad, el hecho que el sistema sea inelástico, hace que las fuerzas internas $f_s(u, \dot{u})$ sean una función de los desplazamientos y las velocidades:

$$m \cdot \ddot{u}(t) + c \cdot \dot{u}(t) + f_s(u, \dot{u}) = -m \cdot \ddot{u}_g(t), \quad (2.70)$$

$$\int_0^u m \cdot \ddot{u}(t) \cdot du + \int_0^u c \cdot \dot{u}(t) \cdot du + \int_0^u f_s(u, \dot{u}) \cdot du = - \int_0^u m \cdot \ddot{u}_g(t) \cdot du, \quad (2.71)$$

El lado derecho de esta ecuación, representa la energía de entrada $E_I(t)$ al sistema definida por excitación sísmica:

$$E_I(t) = -\int_0^u m \cdot \ddot{u}_g(t) \cdot du, \quad (2.72)$$

De ecuación (2.71) se reconoce que el primer término del lado izquierdo, es la energía cinética asociada al movimiento relativo del suelo:

$$E_K(t) = \int_0^u m \cdot \dot{u}(t) \cdot du = \int_0^{\dot{u}} m \cdot \dot{u}(t) \cdot d\dot{u} = \frac{m \cdot \dot{u}^2}{2}, \quad (2.73)$$

El segundo término corresponde a la energía disipada por amortiguamiento viscoso:

$$E_D(t) = \int_0^u f_D(t) \cdot du = \int_0^{\dot{u}} c \cdot \dot{u} \cdot d\dot{u}, \quad (2.74)$$

Y el tercer término es la suma de la energía disipada por histéresis (fluencia de los materiales que componen la estructura) y la energía de deformación del sistema:

$$E_Y(t) = \int_0^u f_S(u, \dot{u}) \cdot du - E_S(t), \quad (2.75)$$

El balance de energía para el sistema es:

$$E_I(t) = E_K(t) + E_D(t) + [E_S(t) + E_Y(t)], \quad (2.76)$$

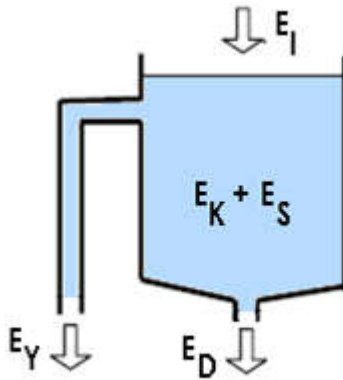


Figura 2.7. Analogía del estanque.

El balance de energía se puede interpretar físicamente a través de la siguiente analogía: Para que el estanque de la figura 2.7, opere eficientemente su capacidad total dada por la suma de su volumen de almacenamiento y las salidas de agua debe ser mayor que la capacidad de admitir energía. Un principio básico del diseño estructural es que las capacidades estructurales deben ser mayores a las demandas sísmicas. En este contexto, debe buscarse que la capacidad de disipación de energía de la estructura debe ser mayor que la demanda de energía histerética (o de fluencia), es decir, incrementar el lado derecho o disminuir el lado izquierdo de la ecuación (2.76) de balance energético. Incrementar el lado derecho puede lograrse aumentando la resistencia lateral de la estructura con lo que se incrementa la importancia de los dos primeros términos con respecto al tercero y cuarto, sin embargo, ello implica un aumento de costo en la estructura. La filosofía actual del diseño sismo-resistente acepta la existencia de deformaciones inelásticas en la estructura, permitiendo de este modo que gran parte de la energía de entrada se disipe por medio de energía histerética.

En una estructura convencional que no tiene dispositivos de disipación de energía, se acepta que existan importantes demandas de deformación inelástica en elementos estructurales (rotulación de vigas, falla de arriostramientos, base de muros, etc.) lo cual se traduce en diferentes niveles de daño.

2.10 Oscilación forzada no amortiguada con carga constante

Si a un sistema de un grado de libertad se le aplica una fuerza de magnitud constante (es decir, una fuerza cuya amplitud no varía en el tiempo), entonces la respuesta particular del sistema a dicha carga tendría un valor de:

$$u_p(t) = u_E = \frac{F}{K}, \quad (2.77)$$

La respuesta total del sistema estará compuesta por la solución homogénea más la solución particular:

$$u(t) = B_1 \cdot \cos(\omega \cdot t) + B_2 \cdot \text{sen}(\omega \cdot t) + \frac{F}{K}, \quad (2.78)$$

Considerando condiciones iniciales nulas ($u_0 = \dot{u}_0 = 0$), se tiene:

$$u(t) = \frac{F}{K} \cdot [1 - \cos(\omega \cdot t)] = u_E \cdot [1 - \cos(\omega \cdot t)], \quad (2.79)$$

Se concluye que el desplazamiento dinámico $u(t)$, es función del desplazamiento estático u_E multiplicado por un factor de amplificación dinámica ($FAD = 1 - \cos(\omega \cdot t)$). Graficando el FAD, se encuentra que el desplazamiento dinámico máximo del sistema es igual a 2 veces el desplazamiento estático del sistema y ocurre cuando $\cos(\omega \cdot t) = -1$, ver Figura 2.8.

El hecho de aplicar la carga horizontal en forma dinámica es equivalente a multiplicar el desplazamiento estático de dicha estructura por 2. Lo anterior, se puede reinterpretar de la siguiente forma:

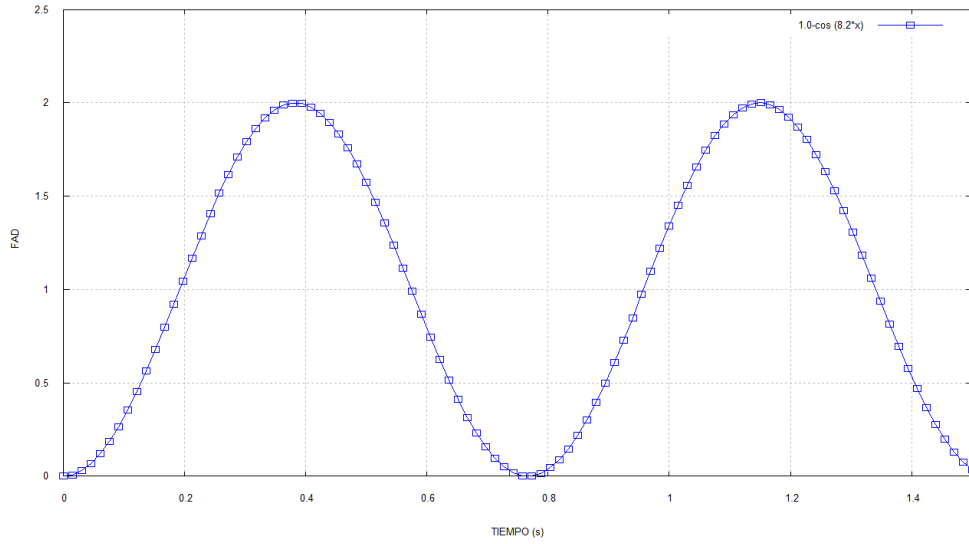


Figura 2.8. Variación del factor de amplificación dinámica FAD .

$$u(t) = \frac{F}{K} \cdot [1 - \cos(\omega \cdot t)] = \quad (2.80)$$

$$u_E \cdot \left[1 - \cos\left(2\pi \cdot \frac{t}{T}\right) \right] \Rightarrow \frac{u(t)}{u_E} = FAD = \left[1 - \cos\left(2\pi \frac{t}{T}\right) \right]$$

La ecuación (2.80) puede re-escribirse en función de fuerzas: como la razón entre la fuerza dinámica que se desarrolla en el sistema y la fuerza estática, en este caso:

$$\frac{u(t)}{u_E} = \frac{u(t) \cdot K}{u_E \cdot K} = \frac{F(t)}{F_E} = \left[1 - \cos\left(2\pi \frac{t}{T}\right) \right] = FAD \Rightarrow F(t) = FAD \cdot F_E, \quad (2.81)$$

Para efectos del diseño estructural, es importante conocer el valor máximo de la fuerza horizontal independientemente del tiempo en donde dicho máximo ocurre.

Consideremos ahora que la fuerza constante tiene una duración definida igual a t_d , es decir corresponde a un pulso rectangular de duración t_d . Si el sistema parte del reposo y no existe amortiguamiento, entonces la respuesta al tiempo final t_d vale:

$$u(t_d) = \frac{F}{K} \cdot [1 - \cos(\omega \cdot t_d)] = u_E \cdot \left[1 - \cos\left(2\pi \cdot \frac{t_d}{T}\right) \right], \quad (2.82)$$

$$\dot{u}(t_d) = \frac{F}{K} \cdot \omega \cdot [\text{sen}(\omega \cdot t_d)] = u_E \cdot \omega \cdot \left[\text{sen}\left(2\pi \cdot \frac{t_d}{T}\right) \right], \quad (2.83)$$

Para evaluar la repuesta después del tiempo t_d , se debe considerar que los valores entregados por las ecuaciones (2.82) y (2.83) para el tiempo t_d corresponden a las condiciones iniciales para esta nueva fase de carga. Es decir, podemos separar el comportamiento del sistema en dos fases de carga, una fase inicial en donde la carga se aplica hasta el tiempo t_d y una fase final en donde la carga se retira en t_d y el sistema de ahí en adelante $t \geq t_d$ responde como si estuviese en vibración libre.

Para $t > t_d$ la respuesta del sistema será:

$$u(t - t_d) = B_1 \cdot \cos(\omega \cdot (t - t_d)) + B_2 \cdot \text{sen}(\omega \cdot (t - t_d)), \quad (2.84)$$

En donde las constantes de integración, se obtienen a partir de las condiciones iniciales (2.82) y (2.83):

$$u(t - t_d) = u(t_d) \cdot \cos(\omega \cdot (t - t_d)) + \frac{\dot{u}(t_d)}{\omega} \cdot \text{sen}(\omega \cdot (t - t_d)) \quad (2.85)$$

$$u(t - t_d) = u_E \cdot [1 - \cos(\omega \cdot t_d)] \cdot \cos(\omega \cdot (t - t_d)) + u_E \cdot \text{sen}(\omega \cdot t_d) \cdot \text{sen}(\omega \cdot (t - t_d)), \quad (2.86)$$

$$u(t - t_d) = \frac{F}{k} \cdot [\cos(\omega \cdot (t - t_d)) - \cos(\omega \cdot t)], \quad (2.87)$$

Luego:

$$FAD = 1 - \cos(2\pi \frac{t}{T}) \text{ para } t \leq t_d \quad (2.88)$$

$$FAD = \cos 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{t_d}{T}) - \cos 2\pi \frac{t}{T} \text{ Para } t > t_d \quad (2.89)$$

2.11 Oscilación forzada amortiguada

En el caso de cargas dinámicas, la respuesta no sólo será función de la rigidez lateral del sistema, sino que además depende de:

1. El periodo de vibración del sistema, es decir, del cociente entre la rigidez lateral y la masa.
2. El coeficiente de amortiguamiento del sistema c.
3. El contenido de frecuencias de la fuerza dinámica, o sea que tan rápido o lenta es la variación de la amplitud de la fuerza externa en el tiempo.

Una de las fuerzas dinámicas más simples es la carga armónica, que aparece en problemas típicos de vibración de maquinarias. En este caso, la excitación externa, es de la forma:

$$F(t) = F_0 \cdot \text{sen}(\varpi \cdot t), \quad (2.90)$$

Donde F_0 es la amplitud de la fuerza y ϖ es la frecuencia de la excitación. En este

caso, la respuesta $u(t)$ tiene dos componentes:

1. Una componente debida a la vibración libre que se denomina solución transitoria del movimiento, la cual decae y tiende a desaparecer por efecto del amortiguamiento estructural.
2. Una componente debida a la energía entregada al sistema por la excitación externa, que se denomina componente o estado de régimen del movimiento, por cuanto es la respuesta que prevalece una vez atenuada la vibración libre (solución particular).

La respuesta de régimen a una excitación armónica también es armónica y de la misma frecuencia aunque no necesariamente en fase con la excitación.

Una vez pasada la fase inicial de transición (al poco tiempo de aplicada la fuerza), el desplazamiento será también de tipo armónico con una amplitud $u(t)$, con una amplitud máxima y un ángulo de desfase o de atraso de la respuesta, con respecto a la excitación:

$$u_p(t) = \frac{\frac{F_0}{k}}{\sqrt{(1-\alpha^2)^2 + (2 \cdot \xi \cdot \alpha)^2}} \cdot \text{sen}(\varpi \cdot t + \phi), \quad (2.91)$$

Siendo $\alpha = \frac{\varpi}{\omega}$ la razón de frecuencias. La solución general es dada por:

$$u(t) = C \cdot e^{-\xi \cdot \omega \cdot t} \cdot \text{sen}(\omega_a \cdot t + \theta) + \frac{\frac{F_0}{k}}{\sqrt{(1-\alpha^2)^2 + (2 \cdot \xi \cdot \alpha)^2}} \cdot \text{sen}(\varpi \cdot t + \phi), \quad (2.92)$$

Luego la respuesta máxima del sistema al ser sometido a una fuerza armónica de amplitud F_0 puede ser mayor, menor o semejante a la producida por la carga estática de igual amplitud, dependiendo básicamente de dos aspectos:

1. La razón entre la frecuencia de excitación y la frecuencia natural del sistema:

$$\alpha = \frac{\varpi}{\omega}$$

2. El grado de amortiguamiento del sistema ξ

En este caso el Factor de Amplificación Dinámico (FAD), corresponde al cociente entre el desplazamiento máximo bajo cargas dinámicas y el desplazamiento estático u_E .

Matemáticamente el FAD de la respuesta estática u_E , se expresa como:

$$FAD = \frac{u_p^{\max}}{u_E} = \frac{\frac{F_0/k}{\sqrt{(1-\alpha^2)^2 + (2 \cdot \xi \cdot \alpha)^2}}}{u_E} = \frac{1}{\sqrt{(1-\alpha^2)^2 + (2 \cdot \xi \cdot \alpha)^2}}, \quad (2.93)$$

Cuando FAD es mayor a uno, existe amplificación dinámica, es decir, el desplazamiento dinámico es mayor al desplazamiento estático. Así mismo cuando es menor a uno existe una reducción. Finalmente cuando es igual a uno, el desplazamiento dinámico es igual al estático.

En la Figura 2.9 se presenta la variación del FAD para diferentes valores de la razón de frecuencias $\alpha = \frac{\varpi}{\omega}$ y grados de amortiguamiento.

Para frecuencias de excitación muy bajas (ósea excitaciones con periodos grandes):

$$\varpi \rightarrow 0 \Rightarrow \alpha \rightarrow 0 \Rightarrow FAD = \frac{u_p^{\max}}{u_E} = \frac{1}{\sqrt{(1-\alpha^2)^2 + (2 \cdot \xi \cdot \alpha)^2}} \cong 1, \quad (2.94)$$

Lo que indica que la respuesta dinámica es igual a la respuesta estática, en otras palabras, el sistema responde como si de una carga estática se tratase. Para fuerzas

con frecuencias de excitación cercanas a la frecuencia natural del sistema, se tiene:

$$\varpi \rightarrow \omega \Rightarrow \alpha = 1 \Rightarrow FAD = \frac{u_p^{\max}}{u_0} = \frac{1}{2 \cdot \xi} \quad (2.95)$$

En este caso, la respuesta dependerá del grado de amortiguamiento de la estructura:

$$u_p^{\max} = \frac{u_0}{2 \cdot \xi} \Rightarrow \xi \rightarrow 0 \Rightarrow u_p^{\max} \rightarrow \infty \Rightarrow \text{Ocurre resonancia} \quad (2.96)$$

$$\text{Si } \xi \rightarrow 1 \Rightarrow u_p^{\max} = \frac{u_0}{2} \text{ (amortiguamiento crítico)} \quad (2.97)$$

Para una fuerza externa con una frecuencia de excitación alta:

$$\varpi \gg \omega \Rightarrow \alpha \rightarrow \infty \Rightarrow FAD \rightarrow 0 \Rightarrow u_p^{\max} \rightarrow 0 \Rightarrow \text{El oscilador no responde} \quad (2.98)$$

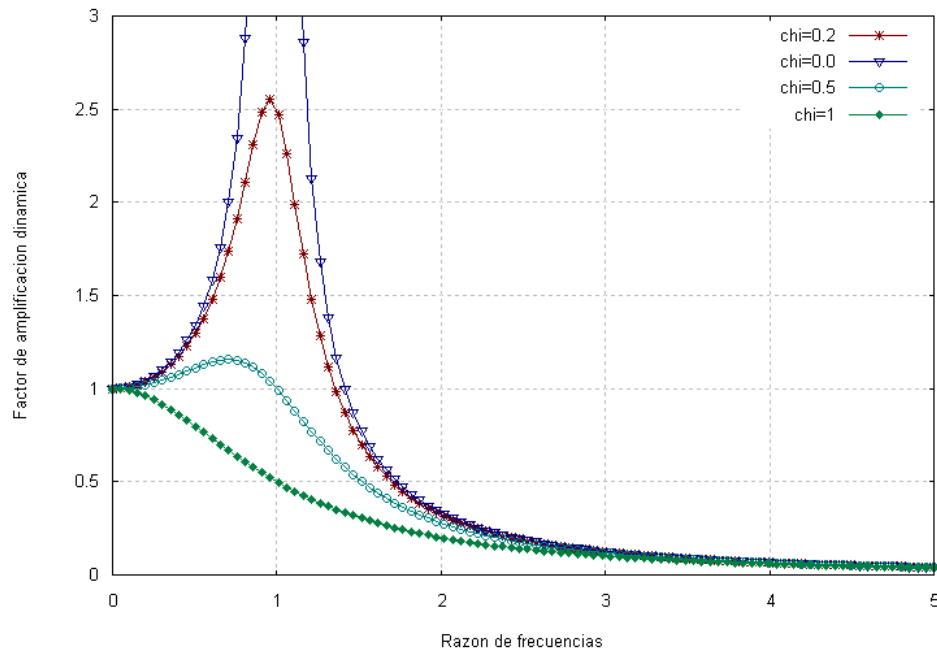


Figura 2.9. Factor de amplificación dinámica.

De ecuación (2.94), se concluye que cuando la frecuencia de la excitación es mucho menor a la frecuencia natural, el desplazamiento dinámico es igual al desplazamiento estático. Por lo contrario, cuando la frecuencia de la excitación es mucho mayor a la frecuencia natural del sistema, el desplazamiento dinámico es menor al estático, y se tiene una reducción de la respuesta dinámica.

Los edificios por lo general tienen amortiguamientos estructurales menores al 0.05, por lo que es importante el evitar frecuencias de excitación semejantes a las frecuencias naturales, para poder evitar de esta forma amplificaciones dinámicas importantes. En resumen:

1. $\varpi \ll \omega \Rightarrow$ Problema Estático
2. $\varpi \approx \omega \Rightarrow$ Problema Dinámico
3. $\varpi \gg \omega \Rightarrow$ No hay respuesta

2.12 Aislamiento de vibraciones: respuesta al movimiento de la base

En esta apartado, se estudiara el caso de estructuras sometidas a movimientos en su fundación: sismos, maquinas, explosiones. Como hipótesis, asumiremos que el movimiento de la base o suelo $u_s(t)$ es del tipo armónico:

$$u_s(t) = u_0 \cdot \text{sen}(\varpi \cdot t), \quad (2.99)$$

Ecuación de equilibrio, en términos de desplazamientos relativos:

$$m \cdot \ddot{u} + c \cdot [\dot{u} - \dot{u}_s] + k \cdot [u - u_s] = 0, \quad (2.100)$$

$$m \cdot \ddot{u} + c \cdot \dot{u} + k \cdot u = c \cdot \dot{u}_s + k \cdot u_s, \quad (2.101)$$

$$m \cdot \ddot{u} + c \cdot \dot{u} + k \cdot u = c \cdot [u_0 \cdot \varpi \cdot \cos(\varpi \cdot t)] + k \cdot [u_0 \cdot \text{sen}(\varpi \cdot t)], \quad (2.102)$$

Expresión, que se puede reescribir como:

$$m \cdot \ddot{u} + c \cdot \dot{u} + k \cdot u = u_0 \cdot \sqrt{(c \cdot \varpi)^2 + k^2} \cdot \text{sen}(\varpi \cdot t + \beta) = F_0 \cdot \text{sen}(\varpi \cdot t + \beta), \quad (2.103)$$

Donde:

$$F_0 = u_0 \cdot \sqrt{(c \cdot \varpi)^2 + k^2} = u_0 \cdot k \cdot \sqrt{(2 \cdot \xi \cdot \alpha)^2 + 1} \quad \text{y} \quad \tan \beta = \frac{c \cdot \varpi}{k} = 2 \cdot \xi \cdot \alpha$$

La solución particular (o en régimen) tiene la forma:

$$u_p(t) = \frac{F_o}{k \cdot \sqrt{(1-\alpha^2)^2 + (2 \cdot \xi \cdot \alpha)^2}} \cdot \text{sen}[(\varpi \cdot t + \beta) + \psi], \quad (2.104)$$

Reemplazando el valor de $F_o = u_0 \cdot k \cdot \sqrt{(2 \cdot \xi \cdot \alpha)^2 + 1}$ en ecuación (2.104), se tiene:

$$u_p(t) = \frac{u_0 \cdot k \cdot \sqrt{(2 \cdot \xi \cdot \alpha)^2 + 1}}{k \cdot \sqrt{(1-\alpha^2)^2 + (2 \cdot \xi \cdot \alpha)^2}} \cdot \text{sen}[(\varpi \cdot t + \beta) + \psi], \quad (2.105)$$

Se define “transmisibilidad” como el grado de aislamiento relativo entre la estructura y el suelo, es decir, la razón entre el máximo desplazamiento de la estructura y el máximo desplazamiento del suelo:

$$T_R = \frac{u_p^{\max}}{u_0} = \frac{\sqrt{(2 \cdot \xi \cdot \alpha)^2 + 1}}{\sqrt{(1-\alpha^2)^2 + (2 \cdot \xi \cdot \alpha)^2}}, \quad (2.106)$$

De figura 2.10, se concluye que:

1. $T_R \rightarrow 0 \Rightarrow$ Sistema aislado
2. $T_R \rightarrow 1 \Rightarrow$ Sistema no aislado
3. $T_R \rightarrow \infty \Rightarrow$ Sistema no aislado (amplificación del movimiento del suelo)

El amortiguamiento disminuye la transmisión del movimiento del suelo para $\alpha \leq \sqrt{2}$, para valores mayores de la razón de frecuencias el efecto del amortiguamiento actúa negativamente.

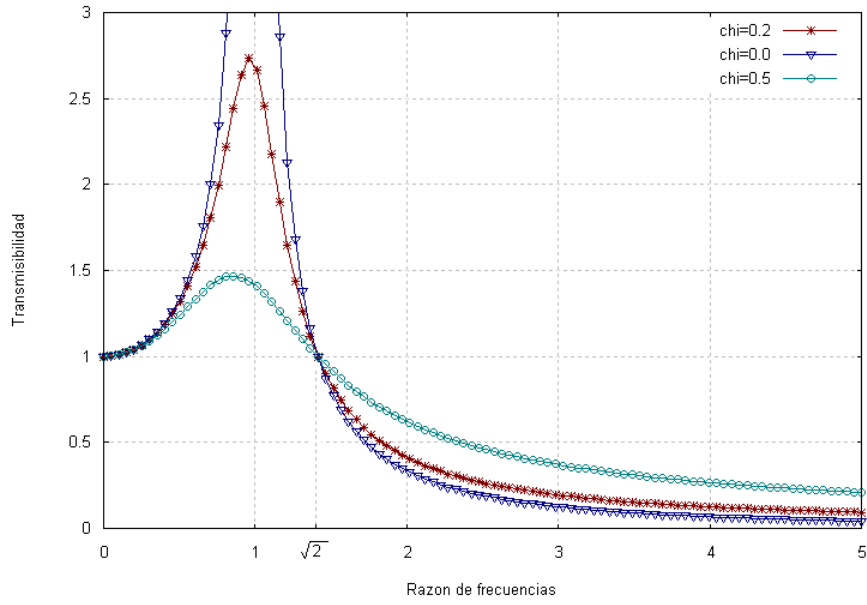


Figura 2.10. Transmisibilidad

El factor de transmisibilidad, se puede asociar con el factor de amplificación dinámica, a través de las siguientes relaciones:

$$T_R = \frac{u_p^{\max}}{u_0} = \frac{u_p^{\max}}{\frac{F_0}{k \cdot \sqrt{(2 \cdot \xi \cdot \alpha)^2 + 1}}} = \frac{k \cdot u_p^{\max}}{F_0} \cdot \sqrt{(2 \cdot \xi \cdot \alpha)^2 + 1} = \quad (2.107)$$

$$\frac{F_{\max}}{F_0} \cdot \sqrt{(2 \cdot \alpha \cdot \xi)^2 + 1}$$

$$FAD = \frac{F_{\max}}{F_0} \Rightarrow T_R = FAD \cdot \sqrt{(2 \cdot \xi \cdot \alpha)^2 + 1}, \quad (2.108)$$

CAPITULO 3

EXITACION ARBITRARIA

3.1 Introducción

En este capítulo se presentan las metodologías para encontrar la respuesta de sistemas sometidos a excitaciones del tipo arbitrario (sismos), se introduce el concepto de respuesta espectral de aceleraciones, velocidades y desplazamientos, al igual que se desarrollan los principales métodos de integración numérica paso a paso de la ecuación de movimiento.

3.2 Respuesta a movimientos sísmicos

Con fines de la ingeniería sismo-resistente, los movimientos del suelo durante un terremoto se miden instrumentalmente por medio de un acelerógrafo, el cual registra las aceleraciones del terreno, ver Figura 3.1.

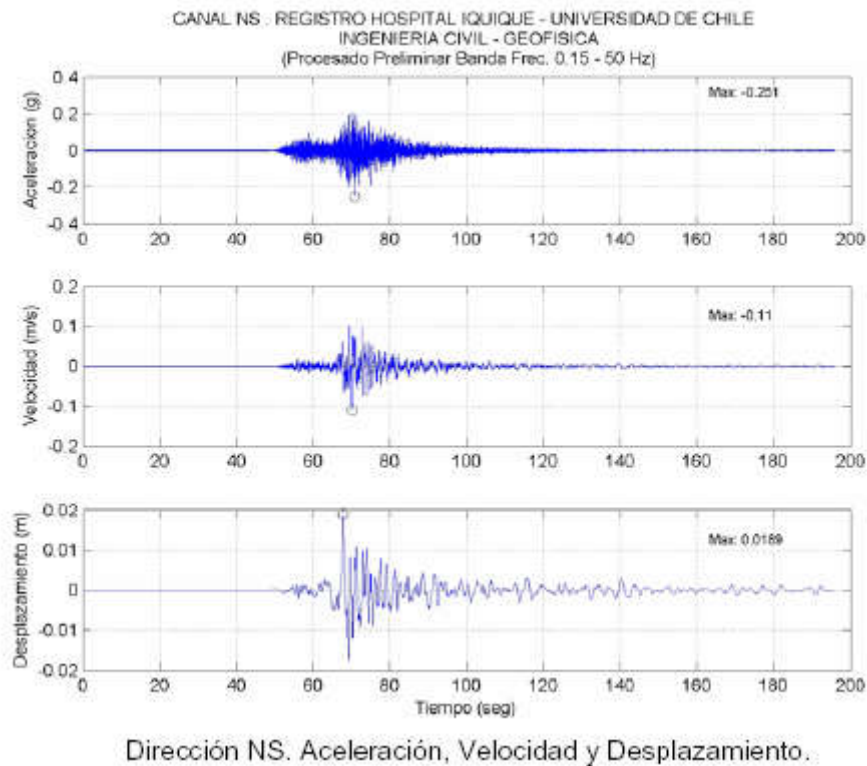


Figura 3.1. Registro de desplazamientos, velocidades y aceleraciones durante el sismo de Iquique del 13 de Junio de 2005.

Como la aceleración es la derivada de la velocidad con respecto al tiempo, es posible obtener las velocidades del terreno a partir de las aceleraciones de terreno por medio de una integración en el tiempo. Análogamente, como la velocidad es la derivada del desplazamiento con respecto al tiempo, es posible obtener la historia de desplazamientos del terreno a partir de una integración en el tiempo de la historia de velocidades o una doble integración de la historia de aceleraciones.

La respuesta de un sistema de un grado de libertad a un movimiento del suelo se puede obtener a partir de la solución de la ecuación diferencial de movimiento de una estructura, utilizando diferentes métodos:

1. En el dominio del tiempo por medio de la solución de la integral de Duhamel.

2. En el dominio del tiempo por medio de una integración paso a paso de la ecuación del movimiento.
3. En el dominio de la frecuencia obteniendo la transformada de Fourier de la historia de aceleraciones, multiplicándola por la función de transferencia del sistema y obteniendo la transformada inversa de Fourier de dicho producto.

3.3 Oscilación forzada bajo cargas no armónicas

En este caso la dificultad del cálculo de la respuesta sísmica se debe al carácter de la excitación $a_g(t)$ que no puede ser expresada en forma analítica, por lo que su cálculo implica la utilización de métodos numéricos.

Si se aborda el problema en el dominio del tiempo, la ecuación de movimiento del sistema de un grado de libertad se expresa por:

$$m \cdot \ddot{u}(t) + c \cdot \dot{u}(t) + k \cdot u(t) = -m \cdot a_g(t), \quad (3.1)$$

La solución a (3.1) se obtendrá a través de la superposición de las respuestas a impulsos rectangulares, para ello, consideremos que la excitación sísmica $-m \cdot a_g(t)$ puede ser modelada como una serie de impulsos. De acuerdo a [B-1], [B-2] considérese la respuesta a un impulso de duración $d\tau$ y de intensidad a_0 que se aplica en la base de la estructura, tal como el indicado en Figura 3.2. Este impulso le imprime una velocidad inicial al sistema $\dot{u}(t=0) = \dot{u}_0$ y un desplazamiento inicial nulo.

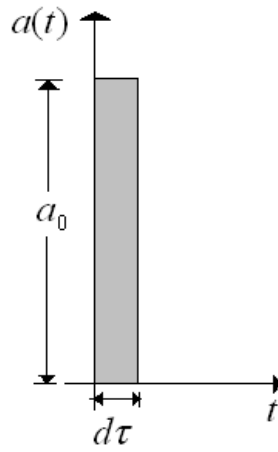


Figura 3.2. Impulso inicial como acción sísmica

Aplicando el principio de la conservación del movimiento, según el cual el momento o cantidad de movimiento $m \cdot \dot{u}_0$ es igual al impulso correspondiente $-m \cdot a_0 \cdot d\tau$, se tiene que:

$$\dot{u}_0 = -a_0 \cdot d\tau, \quad (3.2)$$

La respuesta del sistema al impulso, es equivalente a la de un sistema en vibración libre (por simplicidad consideremos un sistema no amortiguado) con una velocidad inicial dada por (3.2) y un desplazamiento inicial nulo, es decir:

$$u(t) = B_1 \cdot \text{sen}(\omega \cdot t) + B_2 \cdot \cos(\omega \cdot t), \quad (3.3)$$

$$u(t=0) = B_2 \cdot 1 = 0 \Rightarrow B_2 = 0 \quad \text{y}$$

$$\dot{u}(t=0) = B_1 \cdot \omega = -a_0 \cdot d\tau \Rightarrow B_1 = -\frac{a_0}{\omega} \cdot d\tau$$

$$u(t) = -\frac{a_0}{\omega} \cdot d\tau \cdot \text{sen}(\omega \cdot t), \quad (3.4)$$

Si el impulso no se aplica al tiempo cero sino al tiempo τ , entonces la respuesta al tiempo $t > \tau$ será:

$$u(t) = -\frac{a_0}{\omega} \cdot d\tau \cdot \text{sen}(\omega \cdot (t - \tau)), \quad (3.5)$$

Si la excitación sísmica no es un impulso, sino que esta descrita por una curva arbitraria, entonces dicha excitación se puede descomponer en un número finito de impulsos, puesto que el sistema es elástico, su respuesta en cualquier instante de tiempo debida a la aceleración arbitraria puede obtenerse sumando las respuestas elementales producidas por cada uno de los "n" impulsos:

$$u_n(t) = -\sum_{i=1}^n \left[-\frac{a_0 \cdot d\tau}{\omega} \cdot \text{sen}(\omega(t - \tau)) \right], \quad (3.6)$$

Para obtener la respuesta exacta, se pasa al límite cuando $n \rightarrow \infty$, resultando:

$$u(t) = -\frac{1}{\omega} \int_0^t a(\tau) \cdot \text{sen}(\omega(t - \tau)) \cdot d\tau, \quad (3.7)$$

La integral (3.7) se conoce con el nombre de integral de convolución de impulsos elementales o integral de Duhamel [B-1].

Cuando se considera el amortiguamiento estructural, dicha integral se transforma en:

$$u(t) = -\frac{1}{\omega_a} \int_0^t a(\tau) \{ e^{-\xi \cdot \omega_a(t-\tau)} \text{sen}(\omega_a(t - \tau)) \} d\tau, \quad (3.8)$$

En donde $\omega_a = \omega \cdot \sqrt{1 - \xi^2}$ es la frecuencia amortiguada del sistema.

Las expresiones (3.7) y (3.8) se restringen a problemas lineales en donde es posible utilizar el principio de superposición. Su solución analítica solo es posible para algunas expresiones analíticas de la excitación $a(\tau)$ siendo recurrente el uso de métodos numéricos para su solución.

Para una aceleración en la base $a(\tau)$ resulta una fuerza $F(\tau) = -m \cdot a(\tau)$, luego la integral de Duhamel, se puede reescribir como:

$$u(t) = \frac{1}{\omega_a} \int_0^t \frac{F(\tau)}{m} \cdot e^{-\xi \cdot \omega(t-\tau)} \cdot \text{sen}(\omega_a(t-\tau)) \cdot d\tau, \quad (3.9)$$

3.4 Espectro de respuesta sísmica

Para fines del diseño sismo-resistente para una excitación conocida interesa conocer independientemente del tiempo en donde ocurra la respuesta máxima del oscilador (desplazamiento, el corte basal y momento de volcamiento). Una de las herramientas más útiles para evaluar esta interrogante, es la construcción de un espectro de respuesta, el cual se define como la representación gráfica de la respuesta máxima (ya sea de desplazamientos, velocidades o aceleraciones) en función del periodo natural de vibración del sistema para un sismo determinado y un amortiguamiento definido. Es decir, el espectro de respuesta nos da información de la respuesta máxima para toda una familia de sistemas de un grado de libertad (por lo general basta considerar estructuras con periodos comprendidos entre $T = 0 - 3$ s).

Derivando (3.8), se obtiene la solución de la respuesta de velocidades:

$$\dot{u}(t) = -\int_0^t a(\tau) \cdot e^{-\xi \cdot \omega(t-\tau)} \cdot \cos(\omega_a(t-\tau)) \cdot d\tau + \xi \cdot \omega \cdot u(t), \quad (3.10)$$

Derivando nuevamente, se obtiene la respuesta de aceleraciones totales del sistema:

$$\ddot{u}(t) + a(t) = \omega_a \cdot \int_0^t a(\tau) \cdot e^{-\xi \cdot \omega(t-\tau)} \cdot \text{sen}(\omega_a(t-\tau)) \cdot d\tau - 2 \cdot \xi \cdot \omega \cdot \dot{u}(t) - (\xi \cdot \omega)^2 \cdot u(t) \quad (3.11)$$

Los valores espectrales, se definen como:

$$S_d(\omega, \xi) = |u(t)|_{\max}, \quad (3.12)$$

$$S_v(\omega, \xi) = |\dot{u}(t)|_{\max}, \quad (3.13)$$

$$S_a(\omega, \xi) = |\ddot{u}(t) + a(t)|_{\max}, \quad (3.14)$$

Con el fin de obtener expresiones más simples y considerando que en aplicaciones de la Ingeniería Civil el factor de amortiguamiento por lo general es pequeño ($2\% < \xi < 10\%$), es posible aproximar $\omega \cong \omega_a$ y despreciar los términos que están fuera de las integrales de (3.10) y (3.11) [B-2]. Adicionalmente se demuestra que la función coseno que aparece en el espectro de velocidades de (3.10) se puede sustituir a efectos de cálculo por la función seno, sin que ello implique cambios importantes en los valores máximos de la velocidad del sistema.

Considerando lo anterior, se tiene:

$$S_d(\omega, \xi) = \left| -\frac{1}{\omega} \int_0^t a(\tau) \cdot e^{-\xi \cdot \omega(t-\tau)} \cdot \text{sen}(\omega_a(t-\tau)) \right|_{\max}, \quad (3.15)$$

$$S_v(\omega, \xi) = \left| - \int_0^t a(\tau) \cdot e^{-\xi \cdot \omega(t-\tau)} \cdot \text{sen}(\omega_a \cdot (t-\tau)) \right|_{\max}, \quad (3.16)$$

$$S_a(\omega, \xi) = \left| \omega_a \cdot \int_0^t a(\tau) \cdot e^{-\xi \cdot \omega(t-\tau)} \cdot \text{sen}(\omega_a \cdot (t-\tau)) \right|_{\max}, \quad (3.17)$$

Estas aproximaciones permiten escribir:

$$S_v(\omega, \xi) = \omega \cdot S_d(\omega, \xi) \quad \text{y} \quad S_a(\omega, \xi) = \omega^2 \cdot S_d(\omega, \xi) \quad (3.18)$$

Luego los espectros de respuesta S_d, S_v, S_a permiten la estimación inmediata del desplazamiento, la velocidad y la aceleración máxima, de toda una familia de estructuras (distintos periodos fundamentales) sometidas al mismo movimiento del suelo. Las expresiones definidas en (3.18) en rigor son pseudo-espectros, pues los espectros exactos contendrían todos los términos que hemos eliminado en ecuaciones (3.10) y (3.11), pero para efectos de Ingeniería Civil los definidos por ecuación (3.18), los llamamos espectros de respuesta.

El espectro de respuesta permite evaluar la magnitud del desplazamiento máximo de una estructura con un cierto periodo, en comparación con el desplazamiento máximo de otra estructura con diferente periodo, sometida al mismo movimiento del suelo (sismo).

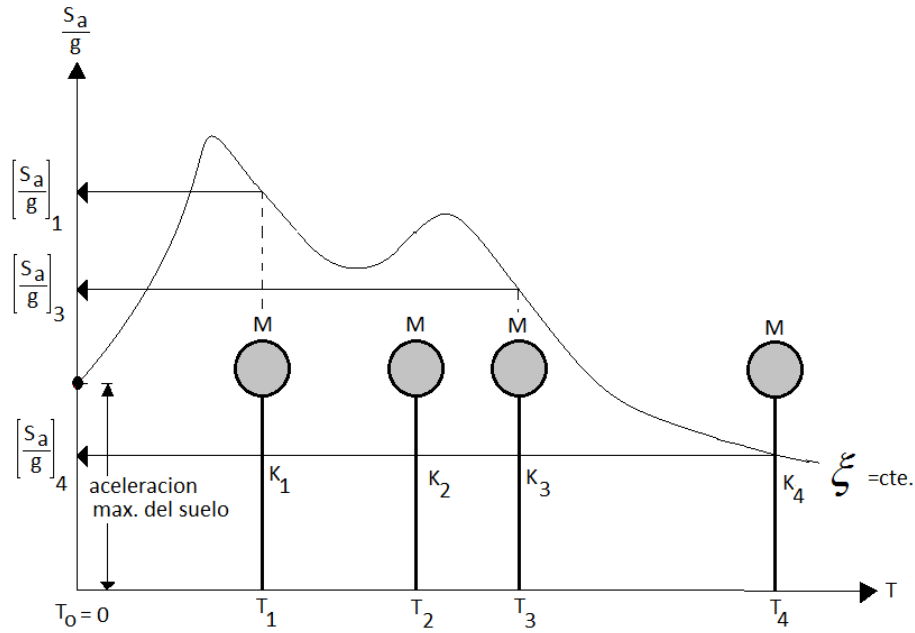


Figura 3.3. Forma genérica de un espectro de aceleraciones normalizado para un grado de amortiguamiento y un sismo dado [CH-1].

A partir del espectro de aceleraciones es posible obtener al máximo corte basal de la estructura a partir de la siguiente expresión:

$$Q_0 = m \cdot S_a = \frac{W}{g} \cdot S_a = C_s \cdot W \quad (3.19)$$

Donde W es el peso total de la estructura sobre el nivel basal y g es la aceleración debida a la gravedad. La razón $\frac{S_g}{g}$ se denomina coeficiente sísmico C_s y es la base de las cargas sísmicas en el diseño sismo-resistente de edificios. Es importante aclarar que la aceleración espectral S_a representa la aceleración en la estructura, la cual puede ser mayor o menor a la máxima aceleración del suelo. En un espectro de respuesta de aceleraciones, la máxima aceleración del suelo está representada como

la ordenada del espectro para un periodo igual a 0, dicho periodo corresponde a una estructura infinitamente rígida (que no vibra), de modo que el movimiento que se tiene en la parte superior de la estructura es exactamente igual al de su base.

El espectro de respuesta se construye calculando la respuesta máxima (aceleración máxima, velocidad máxima o desplazamiento máximo) para una familia de sistemas de un grado de libertad que tienen el mismo amortiguamiento.

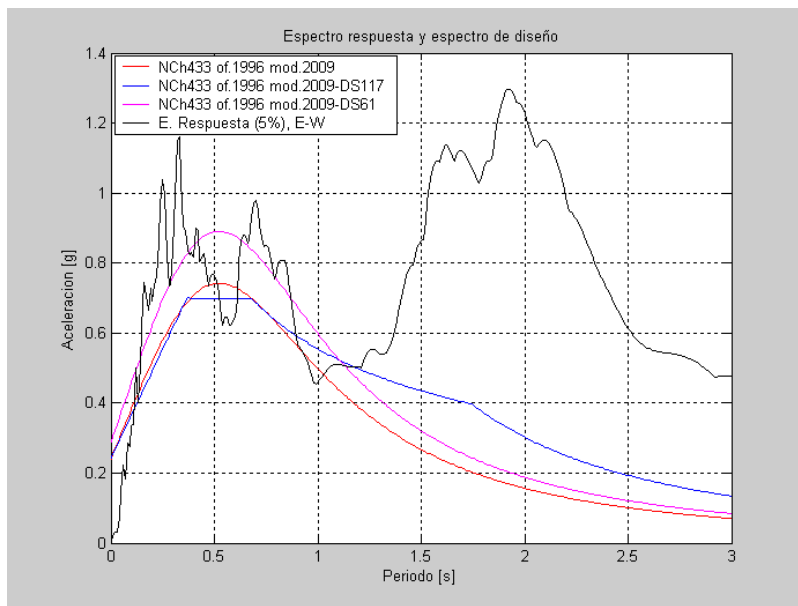


Figura 3.4. Espectro de aceleración elásticos, con 5% de amortiguamiento del registro sísmico de la estación de San Pedro de la Paz del terremoto del 27 de febrero del 2010 (dirección E-W).

La norma NCh433, en sus puntos 6.3.5.1, 6.3.5.2 y 6.3.5.3 especifica que la demanda sísmica inelástica sobre edificios (Figura 3.4), se estima por medio de:

$$S_a = \frac{S \cdot I \cdot A_0}{R^*} \cdot \alpha, \quad (3.20)$$

$$\alpha = \frac{1 + 4.5 \left[\frac{T_n}{T_0} \right]^p}{1 + \left[\frac{T_n}{T_0} \right]^3} \quad (3.21)$$

$$R^* = 1 + \frac{T^*}{0.1T_0 + \left[\frac{T^*}{R_0} \right]} \quad (3.22)$$

En donde:

S , T_0 y p : son parámetros dependientes del tipo de suelo. El factor S varía entre 0.9 (reducción) para suelos Tipo A y 1.3 (amplificación) para suelos Tipo E (Tabla 6.3 de Norma NCh433).

I : Coeficiente relativo a la importancia, uso y riesgo de falla del edificio (Tabla 6.1 de Norma NCh433).

A_0 : Aceleración efectiva máxima del suelo (Tabla 6.2 de Norma NCh433).

R^* : Factor de reducción de la aceleración espectral, calculado para el periodo del modo con mayor masa traslacional equivalente en la dirección de análisis.

α : Factor de amplificación de la aceleración efectiva máxima.

T^* : Período del modo con mayor masa traslacional equivalente en la dirección de análisis.

R_0 : Factor de modificación de la respuesta (Tabla 5.1 de Norma NCh433).

Producto de la dependencia del valor del espectro inelástico del periodo del modo con mayor masa traslacional en la dirección de análisis T^* , este espectro varía para cada dirección (X o Y en planta).

El proceso de cálculo de los espectros de respuesta, se repite para diferentes valores de amortiguamiento, demostrándose que un incremento en el grado de amortiguamiento trae como consecuencia una disminución en las ordenadas espectrales, es decir, una respuesta menor y una suavización de las curva de respuestas (menor variación de las ordenadas espectrales).

3.5 Integración directa de la ecuación de movimiento

Dada la ecuación de movimiento definida en el dominio del tiempo:

$$m \cdot \ddot{u}(t) + c \cdot \dot{u}(t) + k \cdot u(t) = F(t), \quad (3.23)$$

Se puede obtener la respuesta directa sin pasar por la integral de Duhamel, utilizando métodos de integración paso a paso [B-2]. Dichos métodos se dividen en métodos del tipo explícito o del tipo implícito, dependiendo de la configuración en donde se resuelva el problema, y se basan en las siguientes aproximaciones:

$$u(t + \Delta t) = u(t) + \Delta t \cdot \dot{u}(t + \alpha \cdot \Delta t), \quad (3.24)$$

$$\dot{u}(t + \alpha \cdot \Delta t) = (1 - \alpha) \cdot \dot{u}(t) + \alpha \cdot \dot{u}(t + \Delta t), \quad (3.25)$$

En donde dependiendo del valor del parámetro α , se tiene uno u otro método.

Tabla 3.1 Solución Explicito-Implicito

α	Método	Tipo
0	Diferencia hacia adelante	Explicito
$\frac{1}{2}$	Regla punto medio	
$\frac{2}{3}$	Galerkín	
1	Diferencia hacia atrás	Implicito

Lo que se busca, es resolver es la ecuación de movimiento (3.23) en pasos discretos de tiempo $t_1, t_2, \dots, t_n$ distanciados un incremento de tiempo Δt , con $\Delta t = t_{j+1} - t_j$.

3.6 Solución Explícita

Conocidos el desplazamiento y la velocidad en el tiempo t , se busca definir la respuesta en el tiempo $t + \Delta t$ a partir de la ecuación de movimiento (3.23) planteada en el tiempo t .

Utilizando las siguientes aproximaciones (método de las diferencias finitas centradas), se tiene:

$$\dot{u}(t) = \frac{u(t + \Delta t) - u(t - \Delta t)}{2 \cdot \Delta t}, \quad (3.26)$$

$$\ddot{u}(t) = \frac{u(t + \Delta t) - 2 \cdot u(t) + u(t - \Delta t)}{\Delta t^2}, \quad (3.27)$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial de movimiento (3.23):

$$\begin{aligned} & \frac{m}{\Delta t^2} \cdot [u(t + \Delta t) - 2 \cdot u(t) + u(t - \Delta t)] + \\ & \frac{c}{2 \cdot \Delta t} \cdot [u(t + \Delta t) - u(t - \Delta t)] + k \cdot u(t) = F(t) \end{aligned} \quad (3.28)$$

De (3.28) despejando $u(t + \Delta t)$, se tiene:

$$u(t + \Delta t) \cdot \left[\frac{m}{\Delta t^2} + \frac{c}{2 \cdot \Delta t} \right] + u(t) \cdot \left[k - \frac{2 \cdot m}{\Delta t^2} \right] + u(t - \Delta t) \cdot \left[\frac{m}{\Delta t^2} - \frac{c}{2 \cdot \Delta t} \right] = F(t) \quad (3.29)$$

$$\hat{k} \cdot u(t + \Delta t) = R(t) \Rightarrow u(t + \Delta t) = \frac{R(t)}{\hat{k}}, \quad (3.30)$$

En donde:

$$\begin{aligned} R(t) &= F(t) + \left[\frac{2 \cdot m}{\Delta t^2} - k \right] \cdot u(t) + \left[\frac{c}{2 \cdot \Delta t} - \frac{m}{\Delta t^2} \right] \cdot u(t - \Delta t) \quad \text{y} \\ \hat{k} &= \left[\frac{m}{\Delta t^2} + \frac{c}{2 \cdot \Delta t} \right], \end{aligned} \quad (3.31)$$

Para comenzar el proceso de avance paso a paso en el tiempo, se parte de las condiciones iniciales $u(t = 0) = u_0$ y $\dot{u}(t = 0) = \dot{u}_0$:

$$t_1 = t_0 + \Delta t \Rightarrow \hat{k} \cdot u_1 = F_0 + \left[\frac{2 \cdot m}{\Delta t^2} - k \right] \cdot u_0 + \left[\frac{c}{2 \cdot \Delta t} - \frac{m}{\Delta t^2} \right] \cdot u_{-1}, \quad (3.32)$$

En donde u_{-1} , se obtiene a partir de (3.26) y (3.27), particularizadas para el tiempo inicial:

$$\dot{u}(t) = \frac{u(t + \Delta t) - u(t - \Delta t)}{2 \cdot \Delta t} \Rightarrow \dot{u}_0 = \frac{u_1 - u_{-1}}{2 \cdot \Delta t}, \quad (3.33)$$

$$\ddot{u}(t) = \frac{u(t + \Delta t) - 2 \cdot u(t) + u(t - \Delta t)}{\Delta t^2} \Rightarrow \ddot{u}_0 = \frac{u_1 - 2 \cdot u_0 + u_{-1}}{\Delta t^2}, \quad (3.34)$$

Despejando u_{-1} , se tiene:

$$u_{-1} = \frac{\ddot{u}_0 \cdot \Delta t^2}{2} + u_0 - \dot{u}_0 \cdot \Delta t, \quad (3.35)$$

Conocido u_{-1} , se puede comenzar el proceso de avance paso a paso para resolver la ecuación de movimiento en pasos discretos de tiempo, con la condición que el paso de tiempo elegido Δt sea menor que el paso de tiempo crítico Δt_{crit} (método condicionalmente estable).

De acuerdo con BARBAT Y MIQUEL (1994)⁽²⁾, el paso de tiempo crítico se puede estimar por:

$$\Delta t_{crit} = \frac{2}{\omega_{max}} \cdot \gamma, \quad (3.36)$$

En donde ω_{max} es la frecuencia máxima del sistema y γ es un factor de seguridad que se puede elegir entre (0.75 – 0.90). Nótese que en este método, no se requiere de la resolución de ningún sistema de ecuaciones.

3.7 Solución Implícita

Newmark desarrolló una familia de métodos del tipo implícito para resolver la ecuación de movimiento. Dichos métodos se basan en encontrar la respuesta para el tiempo

$t + \Delta t$ a partir del planteamiento de la ecuación de movimiento (3.23) en el tiempo $t + \Delta t$, requiriéndose la solución de un sistema de ecuaciones lineales para encontrar la respuesta, estos métodos son incondicionalmente estables, lo cual se traduce en que no existe limitación para el tamaño del paso del tiempo Δt , salvo el hecho que dicho paso de tiempo debe permitir que la respuesta quede bien definida, para ello se recomienda elegir pasos de tiempo del orden de $T/10$, siendo T el periodo fundamental de la estructura [B-2].

El algoritmo de Newmark, parte definiendo una variación lineal de la aceleración:

$$\ddot{u}(\tau) = \ddot{u}(t) + f(\tau) \cdot [\ddot{u}(t + \Delta t) - \ddot{u}(t)], \quad (3.37)$$

Con:

$$f(\tau) = 0, \text{ para } \tau = t$$

$$f(\tau) = 1, \text{ para } \tau = t + \Delta t \quad (3.38)$$

Integrando (3.37), se obtiene la variación de la velocidad:

$$\dot{u}(t + \Delta t) = \dot{u}(t) + \int_0^{\Delta t} \ddot{u}(\tau) \cdot d\tau = \dot{u}(t) + \ddot{u}(t) \cdot \Delta t + [\ddot{u}(t + \Delta t) - \ddot{u}(t)] \cdot \int_0^{\Delta t} f(\tau) d\tau \quad (3.39)$$

Integrando (3.39) se obtiene la variación del desplazamiento:

$$u(t + \Delta t) = u(t) + \dot{u}(t) \cdot \Delta t + \int_0^{\Delta t} \left[\int_0^{\tau} \ddot{u}(\tau) d\tau \right] d\tau, \quad (3.40)$$

Reemplazado (3.37), en el integrando de (3.40) y realizado la respectiva integración de este término, se tiene:

$$u(t + \Delta t) = u(t) + \dot{u}(t) \cdot \Delta t + \int_0^{\Delta t} \left[\int_0^{\tau} [\ddot{u}(t) + f(\tau) \cdot (\ddot{u}(t + \Delta t) - \ddot{u}(t))] d\tau \right] d\tau, \quad (3.41)$$

$$u(t + \Delta t) = u(t) + \dot{u}(t) \cdot \Delta t + \int_0^{\Delta t} (\ddot{u}(t) \cdot \tau + (\ddot{u}(t + \Delta t) - \ddot{u}(t)) \cdot \int_0^{\tau} f(\tau) d\tau) d\tau, \quad (3.42)$$

$$u(t + \Delta t) = u(t) + \dot{u}(t) \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \cdot \ddot{u}(t) \cdot \Delta t^2 + [\ddot{u}(t + \Delta t) - \ddot{u}(t)] \cdot \int_0^{\Delta t} \int_0^{\tau} f(\tau) d\tau, \quad (3.43)$$

Sea:

$$\int_0^{\Delta t} f(\tau) d\tau = \gamma \cdot \Delta t, \quad \int_0^{\Delta t} \left[\int_0^{\tau} \ddot{u}(\tau) d\tau \right] = \beta \cdot \Delta t^2 \text{ y } u(t + \Delta t) - u(t) = \Delta u \quad (3.43)$$

Reemplazando en (3.39) y (3.43) se tiene:

$$\dot{u}(t + \Delta t) = \dot{u}(t) + \ddot{u}(t) \cdot \Delta t + [\ddot{u}(t + \Delta t) - \ddot{u}(t)] \cdot \gamma \cdot \Delta t, \quad (3.44)$$

$$u(t + \Delta t) = u(t) + \dot{u}(t) \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \cdot \ddot{u}(t) \cdot \Delta t^2 + [\ddot{u}(t + \Delta t) - \ddot{u}(t)] \cdot \beta \cdot \Delta t^2, \quad (3.45)$$

Reordenando términos en (3.44) y (3.45):

$$\dot{u}(t + \Delta t) = \dot{u}(t) + (1 - \gamma) \cdot \ddot{u}(t) \cdot \Delta t + \ddot{u}(t + \Delta t) \cdot \gamma \cdot \Delta t, \quad (3.46)$$

$$u(t + \Delta t) = u(t) + \dot{u}(t) \cdot \Delta t + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \cdot \ddot{u}(t) \cdot \Delta t^2 + \ddot{u}(t + \Delta t) \cdot \beta \cdot \Delta t^2, \quad (3.47)$$

Despejando $\ddot{u}(t + \Delta t)$ en (3.47), se tiene:

$$\ddot{u}(t + \Delta t) = \frac{1}{\beta \cdot \Delta t^2} \cdot (\Delta u - \dot{u}(t) \cdot \Delta t) - \left(\frac{1}{2 \cdot \beta} - 1\right) \cdot \ddot{u}(t), \quad (3.48)$$

Reemplazando (3.48) en (3.46):

$$\begin{aligned} \dot{u}(t + \Delta t) = & \dot{u}(t) + (1 - \gamma) \cdot \ddot{u}(t) \cdot \Delta t + \\ & \left[\frac{1}{\beta \cdot \Delta t^2} \cdot (\Delta u - \dot{u}(t) \cdot \Delta t) - \left(\frac{1}{2 \cdot \beta} - 1\right) \cdot \ddot{u}(t) \right] \cdot \gamma \cdot \Delta t, \end{aligned} \quad (3.49)$$

Reordenando términos, se llega a:

$$\dot{u}(t + \Delta t) = \left(\frac{\gamma}{\beta \cdot \Delta t}\right) \cdot \Delta u + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right) \cdot \dot{u}(t) + \left(1 - \frac{\gamma}{2 \cdot \beta}\right) \cdot \Delta t \cdot \ddot{u}(t), \quad (3.50)$$

En donde los parámetros γ y β determinan la estabilidad del método.

Sustituyendo las ecuaciones (3.47) y (3.50) en la ecuación de equilibrio (3.23), en el tiempo $t + \Delta t$, resulta:

$$m \cdot \ddot{u}(t + \Delta t) + c \cdot \dot{u}(t + \Delta t) + k \cdot u(t + \Delta t) = F(t + \Delta t), \quad (3.51)$$

$$\hat{k} \cdot u(t + \Delta t) = R(t + \Delta t) \Rightarrow u(t + \Delta t) = \frac{R(t + \Delta t)}{\hat{k}} \quad (3.52)$$

Con:

$$\hat{k} = \frac{m}{\beta \cdot \Delta t^2} + \frac{c}{\beta \cdot \Delta t} \cdot \gamma + k, \quad (3.53)$$

$$R(t + \Delta t) = F(t + \Delta t) + m \cdot \left[\frac{1}{\beta \cdot \Delta t^2} \cdot u(t) + \frac{1}{\beta \cdot \Delta t} \cdot \dot{u}(t) + \left(\frac{1}{2 \cdot \beta} - 1 \right) \cdot \ddot{u}(t) \right] + \quad (3.54)$$

$$c \cdot \left[\frac{\gamma}{\beta \cdot \Delta t} \cdot u(t) + \left(\frac{\gamma}{\beta} - 1 \right) \cdot \dot{u}(t) + \left(\frac{\gamma}{2 \cdot \beta} - 1 \right) \cdot \Delta t \cdot \ddot{u}(t) \right]$$

El algoritmo de Newmark es incondicionalmente estable, cuando:

$$\gamma \geq \frac{1}{2} \text{ y } \beta \geq \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2} + \gamma \right)^2, \quad (3.55)$$

CAPITULO 4

APLICACIONES A SISTEMAS DE UN GRADO DE LIBERTAD

4.1 Introducción

A continuación se presentan una serie de ejercicios de carácter académico que permiten comprender las bases del comportamiento dinámico de sistemas de un grado de libertad. La gran mayoría de estos problemas corresponden a problemas de evaluaciones realizadas a los alumnos del curso de pregrado de Dinámica de Estructuras.

4.2 Ejemplos de aplicación

4.2.1 Marco sometido a carga impulsiva rectangular

El marco de la Figura 4.1, tiene una masa total de 50 T y la rigidez flexional de las columnas es constante de valor $EI=6000 \text{ KN} - m^2$. Si la estructura se somete a una carga impulsiva de duración 0.5 s a nivel del diafragma horizontal rígido y se desprecia el amortiguamiento estructural, se pide determinar:

1. La rigidez equivalente y el periodo fundamental.
2. La variación del desplazamiento horizontal. Considere que el sistema se encuentra inicialmente en reposo.
3. El factor de amplificación dinámica de la carga impulsiva.
4. El valor numérico de cada una de las reacciones horizontales que se generaran en las columnas del marco en los apoyos A, B y C.

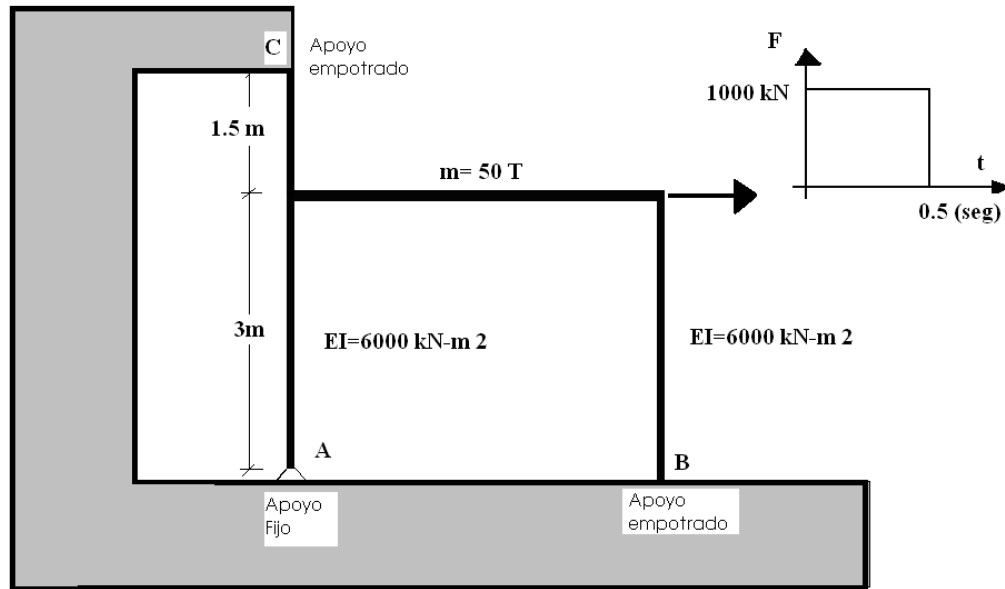


Figura 4.1. Marco rígido sometido a carga lateral impulsiva.

Inicialmente es necesario calcular la rigidez lateral del sistema considerando el aporte de cada columna:

$$k_A = \frac{3 \cdot EI}{L^3} = \frac{3 \cdot 6000 \cdot 10^3}{3^3} = 666.7 \left(\frac{kN}{m} \right), \quad (4.1)$$

$$k_B = \frac{12 \cdot EI}{L^3} = \frac{12 \cdot 6000 \cdot 10^3}{3^3} = 2666.7 \left(\frac{kN}{m} \right), \quad (4.2)$$

$$k_C = \frac{12 \cdot EI}{L^3} = \frac{12 \cdot 6000 \cdot 10^3}{1.5^3} = 21333.3 \left(\frac{kN}{m} \right), \quad (4.3)$$

La rigidez equivalente de piso, en este caso es igual a la suma de todas las subestructuras verticales (columnas) conectadas al diafragma horizontal;

$$k = \sum k_i = 24666.67 \left(\frac{kN}{m} \right) \Rightarrow \quad (4.4)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{24666666.67}{50 \cdot 10^3}} = 22.21 \left(\frac{rad}{s} \right) \quad T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega} = 0.283 \text{ s}$$

Utilizando la integral de Duhamel para estimar la respuesta en la fase inicial de carga que va entre $0 \leq t \leq 0.5 \text{ s}$ (con $F_0 = 1000 \text{ kN}$), se tiene:

$$u_p(t) = \frac{1}{m \cdot \omega} \int_0^t F_0 \sin(\omega(t - \tau)) d\tau = \frac{F_0}{k} [1 - \cos(\omega \cdot t)], \quad (4.5)$$

La solución general en la fase inicial de carga, viene dada por la solución homogénea más la solución particular:

$$u(t) = A \cdot \cos(\omega \cdot t) + B \cdot \sin(\omega \cdot t) + \frac{F_0}{k} [1 - \cos(\omega \cdot t)], \quad (4.6)$$

Dadas las condiciones iniciales nulas del sistema, se tiene que: $A = B = 0$

$$u(t) = 0.04 [1 - \cos(22.2 \cdot t)] \text{ m ; para: } 0 \leq t \leq 0.5 \text{ s} \quad (4.7)$$

Cuando se retira la carga al tiempo $t = 0.5 \text{ s}$, el desplazamiento y la velocidad valen:

$$u(0.5) = 0.041 [1 - \cos(11.1)] = 0.0365 \text{ m ,} \quad (4.8)$$

$$u'(0.5) = 0.911 \cdot \sin(11.1) = -0.905 \text{ m/s ,} \quad (4.9)$$

Luego de retirar la carga la estructura queda en oscilación libre no amortiguada, con las condiciones iniciales correspondientes a las finales de la fase inicial en $t = 0.5 \text{ s}$ (ecuaciones 4.8 y 4.9):

$$u(t) = 0.0365 \cdot \cos(\omega \cdot (t - 0.5)) - 0.04075 \cdot \sin(\omega \cdot (t - 0.5)) \text{ m , para: } \quad (4.10)$$

$$t > 0.5 \text{ s}$$

En la Figura 4.2 se observa que el desplazamiento dinámico máximo del sistema es $u_{\text{máx}} = 0.082$ (dos veces el desplazamiento estático del sistema) y ocurre en la fase inicial de carga del sistema.

Las fuerzas que toma cada columna:

$$F_{A\text{max}} = u_{\text{max}} \cdot k_1 = 0.082 \times 666666.67 = 54.67 \text{ (kN)} \quad (4.11)$$

$$F_{B\text{max}} = u_{\text{max}} \cdot k_2 = 0.082 \times 2666666.67 = 218.67 \text{ (kN)}$$

$$F_{C\text{max}} = u_{\text{max}} \cdot k_3 = 0.082 \times 21333333.33 = 1749.3 \text{ (kN)}$$

La columna más rígida (en este caso la columna corta) es la que toma más esfuerzo de corte, lo cual es evidente pues la fuerza es proporcional a la rigidez, siendo en este caso la columna C la más rígida.

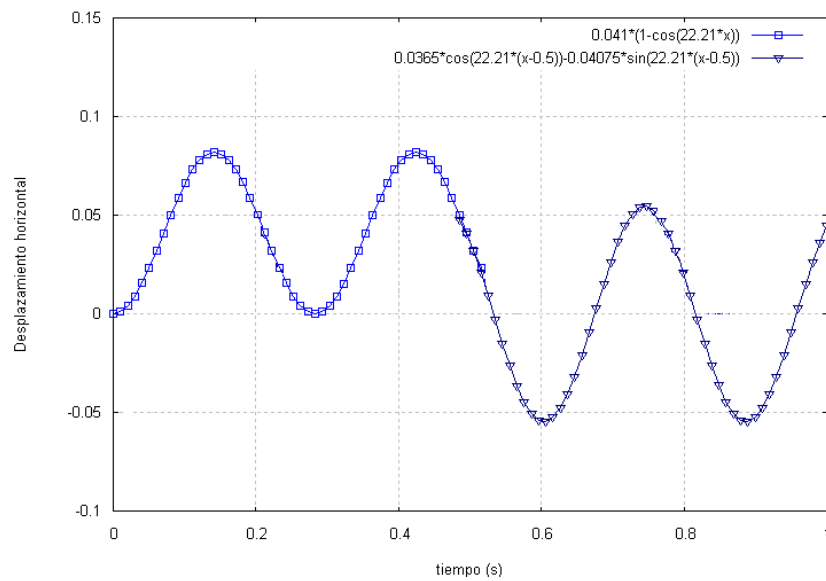


Figura 4.2. Respuesta de la estructura para la carga impulsiva dada.

4.2.2 Marco sometido a excitación basal

La estructura de la Figura 4.3 está compuesta por tres columnas verticales de igual rigidez flexional $EI = 5000 \text{ kN-m}^2$, la masa del sistema vale $M = 20 \text{ T}$ y puede ser concentrada al nivel del diafragma horizontal rígido, si el amortiguamiento estructural se puede despreciar, responda a las siguientes preguntas:

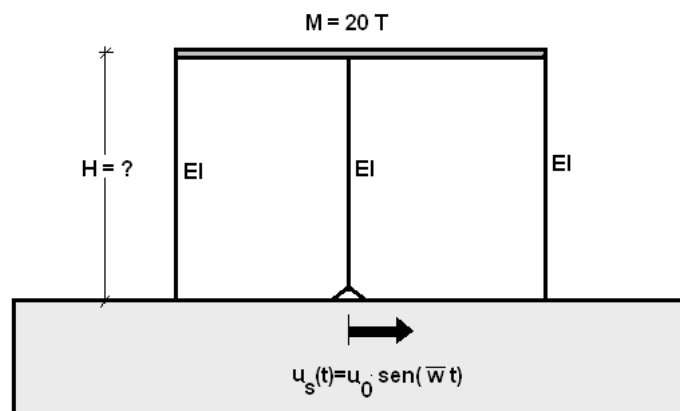


Figura 4.3. Marco plano sometido a un desplazamiento del tipo armónico.

1. Considerando que las condiciones iniciales del problema son $u(t=0) = 0.05 \text{ m}$, $\dot{u}(t=0) = 1 \frac{m}{s}$ y que el sistema oscila libremente sin amortiguación, se pide estimar la altura de las columnas para que el desplazamiento horizontal máximo sea menor que $u_{\max} = 0.081 \text{ m}$.
2. Si la base del edificio experimenta una excitación del tipo armónico como la indicada en la Figura 4.3 con $u_0 = 0.04 \text{ m}$ y $\varpi = 20 \text{ rad/s}$, determine la forma analítica de la respuesta permanente del sistema.
3. Calcule el factor de transmisibilidad entre la estructura y el suelo y comente su respuesta.

La rigidez equivalente del sistema corresponde a:

$$k = \frac{12 EI}{H^3} + \frac{3 EI}{H^3} + \frac{12 EI}{H^3} = \frac{27 EI}{H^3} \quad (4.12)$$

Considerando que el sistema oscila libremente sin amortiguación, la solución del problema será del tipo:

$$u(t) = u_{\max} \cdot \sin[\omega \cdot t + \phi] \text{ con } u_{\max} = \sqrt{u_0^2 + \left(\frac{\dot{u}_0}{\omega}\right)^2} \quad (4.13)$$

Reemplazando:

$$u_0 = 0.05 \text{ m}, \dot{u}_0 = 1 \frac{m}{s} \text{ y } u_{\max} = 0.081 \text{ m} \quad \text{se tiene:}$$

$$u_{\max} = \sqrt{0.05^2 + \left(\frac{1}{\omega}\right)^2} = 0.081 \Rightarrow \omega = 15.69 [\text{rad/s}]$$

Puesto que se conocen la masa del sistema $m = 20000 \text{ Kg}$, la frecuencia fundamental

$\omega = 15.69 \text{ [rad / s]}$ y la rigidez equivalente $k = \frac{27 EI}{H^3}$, se tiene:

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow k = m \cdot \omega^2 = \frac{27 \cdot EI}{H^3} \Rightarrow H = \left[\frac{27 \cdot EI}{\omega^2 \cdot m} \right]^{1/3} = 3.01 \text{ m} \quad (4.14)$$

La ecuación movimiento del sistema debido al movimiento de la base, se define por:

$$m\ddot{u} + ku = -m\ddot{u}_s(t) \quad (4.15)$$

Con la excitación definida en forma armónica:

$$u_s(t) = u_0 \cdot \text{sen}(\omega t) \quad (4.16)$$

$$\dot{u}_s(t) = u_0 \omega \cos(\omega t)$$

$$\ddot{u}_s(t) = -u_0 \omega^2 \text{sen}(\omega t)$$

Reemplazando en la ecuación de movimiento (4.15):

$$m\ddot{u} + ku = \underbrace{m u_0 \omega^2}_{F_0} \text{sen}(\omega t) \Rightarrow m\ddot{u} + ku = F_0 \cdot \text{sen}(\omega t) \quad (4.17)$$

$$u_p(t) = \frac{u_0}{1 - \alpha^2} \text{sen}(\omega t + \varphi) \text{ con } \tan(\varphi) = \frac{-2\xi\alpha}{1 - \alpha^2} \quad (4.18)$$

Como no hay amortiguamiento $\varphi = 0$, y la solución permanente se define por:

$$u_p(t) = \frac{0.04}{1 - \left[\frac{20}{15.69} \right]^2} \cdot \text{sen}(20 \cdot t) = -0.065 \cdot \text{sen}(20 \cdot t) \quad (4.19)$$

En la Figura 4.4 se presenta en forma independiente el movimiento del suelo y de la estructura, se observa que se produce una amplificación del movimiento del suelo, es decir un observador a nivel del diafragma rígido, sentirá un movimiento mayor que si él se ubicara en la base de la estructura, es decir, se produce sobre la estructura una amplificación del movimiento basal, dicha amplificación se puede estimar:

$$T_R = \frac{u_p^{max}}{u_o} = \frac{1}{(1 - \alpha^2)} = 1.6 \Rightarrow 1.6 \cdot 0.04 = 0.064 = u^{max}, \quad (4.20)$$

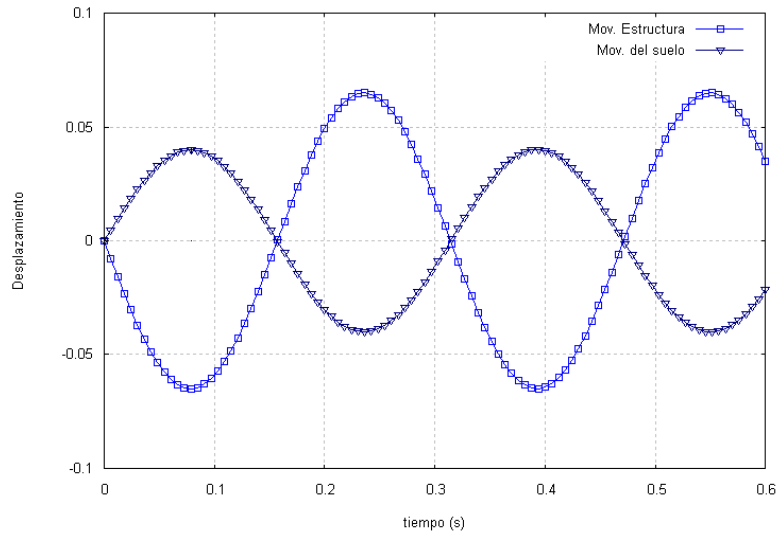


Figura 4.4. Movimiento de la base de la estructura y del diafragma horizontal.

4.2.3 Marco sometido a carga impulsiva triangular

La estructura de la figura está compuesta por dos columnas verticales de igual rigidez flexional $EI = 5000 \text{ kN}\cdot\text{m}^2$, la masa del sistema vale $M = 20 \text{ T}$ y puede ser concentrada al nivel del diafragma horizontal rígido. La estructura, se conecta a un muro rígido indeformable a través de un sistema mecánico de rigidez axial $K = 50 \text{ kN/m}$. Se sabe que la razón de amortiguamiento es nula (es decir, $c = 0, \zeta = 0$).

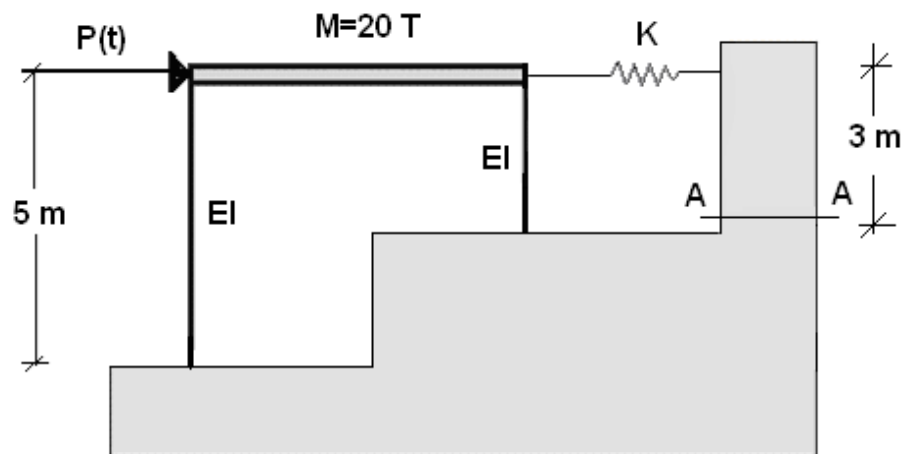
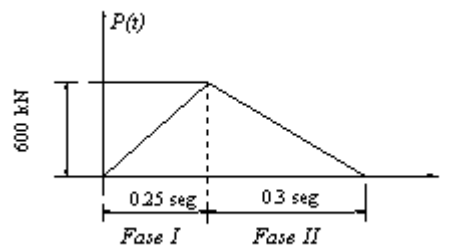


Figura 4.5. Marco plano sometido a carga triangular impulsiva.



Bajo estas condiciones se pide:

1. Definir analítica y gráficamente la ley de variación que describe el desplazamiento horizontal del diafragma rígido para la fase de carga ascendente (fase I).

2. Definir el valor numérico del desplazamiento horizontal máximo que se desarrolla en la fase ascendente de carga.
3. Evaluar el valor de los esfuerzos de corte tanto en la base de las columnas, como en la sección A-A que se desarrollan para el desplazamiento máximo en la fase ascendente.

$$k_H = \frac{12EI}{H_1^3} + \frac{12EI}{H_2^3} + k = 2752.2 \frac{kN}{m}, \quad (4.21)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{2752.2 \times 10^3}{20 \cdot 10^3}} = 11.73 \frac{rad}{s}, \quad (4.22)$$

$$P(t) = \begin{cases} 2400\tau & 0 \leq \tau \leq 0.25 (s) \\ 1100 - 2000\tau & 0.25 \leq \tau \leq 0.55 (s), \\ 0 & \tau \geq 0.55 (s) \end{cases} \quad (4.23)$$

La solución particular se obtiene mediante la integral de Duhamel:

$$u_p(t) = \frac{1}{m\omega} \int_0^t P(\tau) \cdot \text{sen}(\omega(t-\tau)) d\tau = \frac{1}{m\omega} \int_0^{t=0.25} 2400\tau \cdot \text{sen}(\omega(t-\tau)) d\tau, \quad (4.20)$$

Integrando por partes:

$$\begin{aligned} u &= \tau & du &= d\tau \\ dv &= \text{sen}(\omega(t-\tau)) & v &= \frac{\cos(\omega(t-\tau))}{\omega} \end{aligned}$$

$$u_p(t) = \frac{2400}{m\omega} \left[\frac{\tau}{\omega} \cos(\omega(t-\tau)) \Big|_0^{t=0.25} - \int_0^{t=0.25} \frac{\cos(\omega(t-\tau))}{\omega} d\tau \right], \quad (4.21)$$

$$u_p(t) = \frac{2400}{m\omega} \left[\frac{t}{\omega} - \frac{\text{sen}(\omega t)}{\omega^2} \right], \quad (4.22)$$

Reemplazando valores, se llega:

$$u_p(t) = 0.87t - 0.074 \operatorname{sen}(11.73t) \text{ m}, \quad (4.23)$$

La solución homogénea será de la forma:

$$u_H(t) = A \cdot \operatorname{sen}(\omega \cdot t) + B \cdot \cos(\omega \cdot t) \text{ m}, \quad (4.24)$$

Así solución total para la fase ascendente será:

$$u_T(t) = A \cdot \operatorname{sen}(\omega \cdot t) + B \cdot \cos(\omega \cdot t) + 0.87 \cdot t - 0.074 \cdot \operatorname{sen}(11.73 \cdot t) \text{ m}, \quad (4.25)$$

Considerando condiciones iniciales nulas, A=B=0, por lo tanto:

$$u_T(t) = 0.87 \cdot t - 0.074 \cdot \operatorname{sen}(11.73 \cdot t) \text{ m}, \quad (4.26)$$

De Figura 4.6, se aprecia que el desplazamiento máximo se produce en $t = 0.25 \text{ s}$ vale aproximadamente $u_T(t = 0.25) = 0.20 \text{ m}$. El corte en la base de las columnas y en la sección A-A, se obtiene utilizando el desplazamiento máximo y la rigidez de cada elemento.

$$F_1 = k_1 \cdot u_{\max} = \frac{12EI}{h_1^3} u_{\max} = \frac{12 \cdot 5000}{5^3} \cdot 0.202 = 96.96 \text{ kN} \quad (4.27)$$

$$F_2 = k_2 \cdot u_{\max} = \frac{12EI}{h_2^3} u_{\max} = \frac{125000}{3^3} \cdot 0.202 = 448.89 \text{ kN}$$

$$\text{Sección A-A: } F_3 = k \cdot u_{\max} = 500.202 = 10.1 \text{ kN}$$

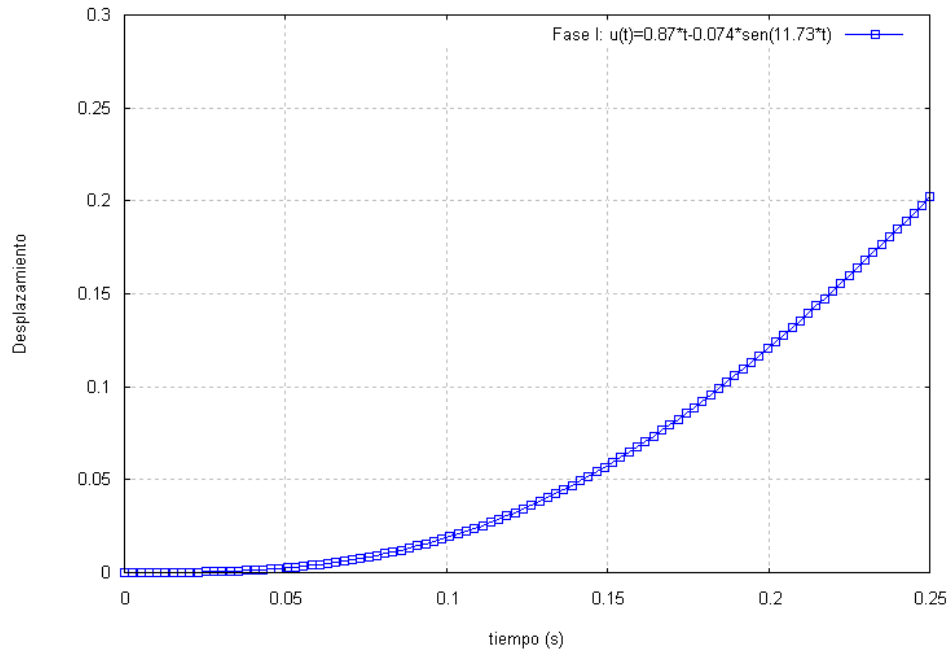


Figura 4.6. Respuesta en fase I.

4.2.4 Marco sometido a carga armónica

El marco de la Figura 4.7, tiene una masa total de 30.000 kg y la rigidez flexional de cada columna es constante de valor $EI=8000 \text{ KN}\cdot\text{m}^2$. Si a nivel del diafragma horizontal rígido se aplica una fuerza armónica definida por $F(t)=F_0 \cdot \sin(10 \cdot t)$, se pide despreciando el amortiguamiento estructural:

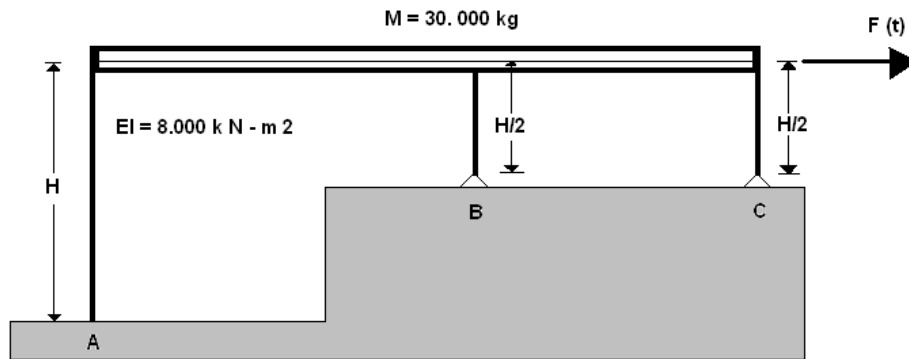


Figura 4.7. Marco plano sometido a carga armónica.

Determinar la altura de las columnas para que la frecuencia fundamental del sistema no sea superior a 12 rad/seg .

$$\omega_1^2 = \frac{K_H}{M} \Rightarrow K_H = M \cdot \omega_1^2 = 30.000 \cdot 12^2 = 4320 \text{ kN} , \quad (4.28)$$

$$K_H = \sum k_i = 12 \frac{EI}{H^3} + 6 \frac{EI}{\left[\frac{H}{2}\right]^3} = 60 \frac{EI}{H^3} \Rightarrow \quad (4.29)$$

$$H^3 = 60 \cdot \frac{8.000}{4320} = 111,11 \Rightarrow H = 4.81 \text{ m}$$

Encontrar la amplitud de la fuerza forzante F_0 , para que la amplitud del desplazamiento dinámico máximo no supere los 6 cm , considerando que la frecuencia fundamental vale 12 rad/seg .

$$A = \frac{F_0}{K_H} \cdot \frac{1}{(1 - \alpha^2)} = \frac{6}{100} \Rightarrow \quad (4.30)$$

$$F_0 = 0.06 \cdot 4.320.000 \cdot (1 - (\frac{10}{12})^2) = 79.2 \text{ kN}$$

Determinar las fuerzas de corte que toman cada una de las columnas para el valor de la amplitud del forzante F_0 , definido en el punto anterior.

$$K_A = 12 \cdot \frac{8000}{4.81^3} = 862.7 \frac{\text{kN}}{\text{m}}; \quad K_B = K_C = 3 \cdot \frac{8000}{2.41^3} = 1725.3 \frac{\text{kN}}{\text{m}}, \quad (4.31)$$

$$K_H = 4313.3 \frac{\text{kN}}{\text{m}}, \quad (4.32)$$

$$F_A = \frac{862.7}{4313.3} \cdot 79.2 = 15.8 \text{ kN} \text{ y } F_B = F_C = \frac{1725.3}{4313.3} \cdot 79.2 = 31.7 \text{ kN} \quad (4.33)$$

Definir el valor de la amplitud del desplazamiento estático asociado a F_0 :

$$u_0 = \frac{F_0}{K_H} = \frac{79.2}{4320.0} = 0.018 \text{ m}, \quad (4.34)$$

4.2.5 Maquina conectada a pared rígida

La máquina de la Figura 4.8, tiene una masa de 330 kg y se encuentra ligada a una pared rígida, a través de un sistema de resortes elásticos lineales. Si dicha maquina estará sometida a la acción continua de una fuerza horizontal del tipo armónico de amplitud máxima de 20 kN y de frecuencia 1 Hz . Se pide:

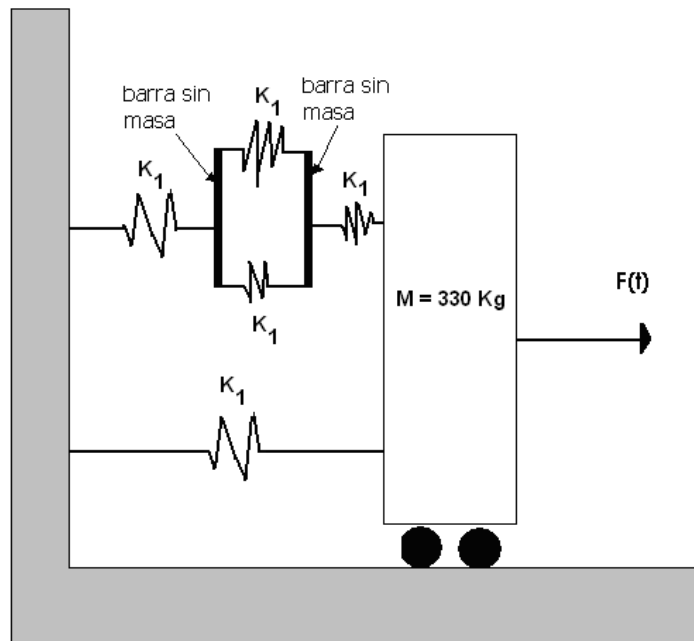


Figura 4.8. Maquina conectada a pared rígida.

Determinar el valor de la constante elástica K_1 , para el desplazamiento horizontal máximo en operación (servicio) no exceda los 6.0 cm .

La rigidez equivalente del sistema de resortes superiores (en serie), se obtiene a partir de:

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{K_1} + \frac{1}{2K_1} + \frac{1}{K_1} = \frac{5}{2K_1} \Rightarrow K = \frac{2K_1}{5}, \quad (4.35)$$

Luego la rigidez equivalente de todo el sistema que conecta la maquina con la pared, se calcula como:

$$K_e = \left[\frac{2 \cdot K_1}{5} \right] + K_1 = \frac{7}{5} \cdot K_1, \quad (4.36)$$

La ecuación (2.92) nos permite definir el valor de la amplitud máxima del movimiento considerando que el grado de amortiguamiento ξ es nulo:

$$u_{\max} = \frac{F_0}{K_e(1-\alpha^2)} \text{ con } \alpha = \frac{\varpi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega}, \quad (4.37)$$

$$\text{Pero } \omega = \sqrt{\frac{K_e}{m}} \Rightarrow K_e = \omega^2 \cdot m, \quad (4.38)$$

$$\frac{6}{100} = \frac{20.000,0}{\omega^2 \cdot 330 \cdot \left[1 - \frac{4 \cdot \pi^2}{\omega^2}\right]} \Rightarrow \quad (4.39)$$

$$\omega^2 \cdot 330 - 4 \cdot \pi^2 \cdot 330 = 333.333,33 \Rightarrow \omega = 32,4 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$K_e = 32,4^2 \cdot 330 \Rightarrow K_1 = \frac{5}{7} \cdot [32,4^2 \cdot 330] = 247,4 \frac{\text{kN}}{\text{m}}, \quad (4.40)$$

Estime la fuerza máxima que se transmite a la pared rígida, cuando el sistema está funcionando.

$$F_T = 20.000,0 \cdot \frac{1}{\left[1 - \left[\frac{6,28}{32,4}\right]^2\right]} = 20,78 \text{ kN}, \quad (4.41)$$

Estime el valor de la constante de amortiguamiento “C” necesaria de adicionar al sistema mediante un dispositivo mecánico del tipo amortiguador viscoso para que el sistema no vibre.

$$c = c_{cr} = 2 \cdot \sqrt{K_e \cdot m} = 2 \cdot \sqrt{346.420,8 \cdot 330} = 21,38 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \quad (4.42)$$

CAPITULO 5

SISTEMAS DE N GRADOS DE LIBERTAD

5.1 Introducción

Si bien el sistema de un grado de libertad conduce a aproximaciones razonables para obtener una estimación del comportamiento global de un edificio, existen ocasiones en las que es necesario recurrir a modelos más sofisticados en los que la masa de la estructura ya no se concentra en un sólo punto, si no que se distribuye en varios puntos a lo alto del edificio. Típicamente, en este tipo de modelos se supone que la masa está concentrada en los niveles de piso y sujeta a desplazamientos laterales únicamente en dicho nivel.

5.2 Ecuaciones de movimiento

En la Figura 5.1 se muestra un modelo dinámico de un edificio de tres pisos, en donde cada piso se puede representar por una masa concentrada que tiene la posibilidad de desplazarse únicamente en forma horizontal. Lo anterior dado que se asume la hipótesis que las columnas son inextensibles [P-1].

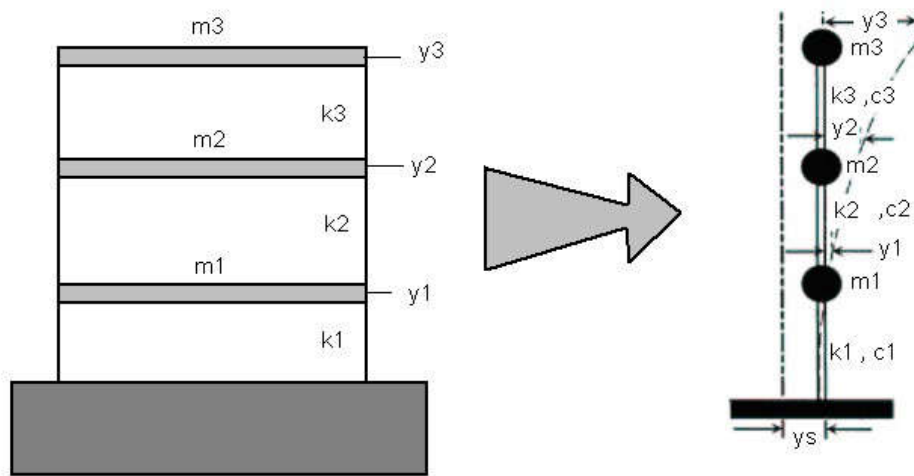


Figura 5.1. Modelo de estructura de 3 grados de libertad.

Los desplazamientos relativos de piso, se estiman de acuerdo con:

$$u_1 = y_1 - y_s \quad (5.1)$$

$$u_2 = y_2 - y_1$$

$$u_3 = y_3 - y_2$$

Por equilibrio de cada una de las masas del sistema (ver Figura 5.2) y sin considerar el amortiguamiento estructural, se llega a:

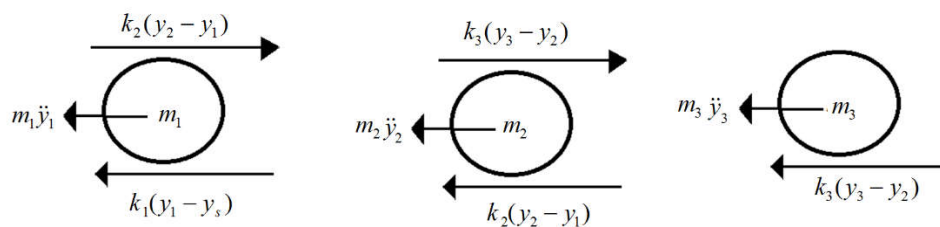


Figura 5.2. Diagrama de cuerpo libre de cada una de las masas traslacionales.

$$m_1 \Rightarrow m_1 \ddot{y}_1 + k_1(y_1 - y_s) - k_2(y_2 - y_1) = 0 \quad (5.2)$$

$$m_2 \Rightarrow m_2 \ddot{y}_2 + k_2(y_2 - y_1) - k_3(y_3 - y_2) = 0$$

$$m_3 \Rightarrow m_3 \ddot{y}_3 + k_3(y_3 - y_2) = 0$$

Considerando que el movimiento del suelo es nulo ($y_s = 0$), se tiene:

$$m_1 \ddot{y}_1 + (k_1 + k_2)y_1 - k_2 y_2 = 0 \quad (5.3)$$

$$m_2 \ddot{y}_2 - k_2 y_1 + (k_2 + k_3)y_2 - k_3 y_3 = 0$$

$$m_3 \ddot{y}_3 + k_3(y_3 - y_2) = 0$$

Reordenado los términos de las ecuaciones y re-escribiéndolas en forma matricial, se llega a:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \\ \ddot{y}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

Introduciendo el amortiguamiento estructural y una aceleración basal $\ddot{y}_s(t)$:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{y}_1 + \ddot{y}_s \\ \ddot{y}_2 + \ddot{y}_s \\ \ddot{y}_3 + \ddot{y}_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \\ \ddot{y}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{bmatrix} + \\
& \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \\
& - \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \ddot{y}_s
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Para ello, se han considerado las siguientes hipótesis:

1. La masa traslacional se concentra a nivel de cada piso (el sistema tiene tantos grados de libertad como número de pisos). Una estimación de la masa se puede hacer a partir del valor del peso sísmico por unidad de área q_s y el área en planta del diafragma A , obteniéndose $m = \frac{q_s \cdot A}{g}$.
2. Las columnas son elementos indeformables desde el punto de vista axial, es decir, no se estiran ni se acortan.
3. A nivel de cada piso, existe un diafragma horizontal rígido, que solo se traslada en la dirección del horizontal y en donde todos los puntos contenidos en él, se desplazan la misma cantidad.

El sistema de ecuaciones diferenciales de coeficientes constantes de (5.5), se puede expresar en forma matricial, de acuerdo con:

$$\underline{\underline{M}} \cdot \underline{\underline{\ddot{y}}} + \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{\dot{y}}} + \underline{\underline{K}} \cdot \underline{\underline{y}} = -\underline{\underline{M}} \cdot \underline{\underline{1}} \cdot \ddot{y}_s, \tag{5.6}$$

Nótese que la matriz de masa concentrada $\underline{\underline{M}}$ es diagonal y definida positiva, y la matriz de amortiguamiento $\underline{\underline{C}}$ y rigidez son simétricas $\underline{\underline{K}}$.

A nivel de cada una de las masas las ecuaciones de movimiento se encuentran acopladas, es decir, los desplazamientos asociados a la masa m_i , dependen de los desplazamientos y velocidades relativas del piso inferior y superior.

Cuando la estructura no está sometida a excitación externa alguna (aceleración del suelo $\ddot{y}_s = 0$), y su movimiento está gobernado solo por las condiciones iniciales se considera que el sistema se encuentra en vibración libre. Bajo esta condición y suponiendo que el amortiguamiento estructural es nulo $\underline{\underline{C}}=0$, es posible encontrar el vector de desplazamientos que satisface el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\underline{\underline{M}} \cdot \ddot{\underline{y}} + \underline{\underline{K}} \cdot \underline{y} = 0, \quad (5.7)$$

La solución analítica, para cada uno de los grados de libertad es dada por:

$$\begin{aligned} y_1 &= \Phi_1 \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \phi) \\ y_2 &= \Phi_2 \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \phi) \\ y_3 &= \Phi_3 \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \phi) \end{aligned} \quad (5.8)$$

Que en forma vectorial se expresa por:

$$\underline{y} = \underline{\Phi} \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \phi), \quad (5.9)$$

En donde $\underline{\Phi}$ es el vector de amplitudes, ω es la frecuencia propia del sistema y ϕ es

el ángulo de desfase. Sustituyendo (5.9) en (5.7) resulta:

$$[\underline{\underline{K}} - \omega^2 \underline{\underline{M}}] \cdot \underline{\underline{\Phi}} = 0, \quad (5.10)$$

La solución del sistema de ecuaciones (5.10) constituye un problema de valores y vectores propios. Este sistema tiene soluciones $\underline{\underline{\Phi}}$ diferentes de cero (es decir, el sistema vibra) solamente si el determinante de la matriz de los coeficientes es nulo:

$$\det[\underline{\underline{K}} - \omega^2 \underline{\underline{M}}] = 0, \quad (5.11)$$

La ecuación algebraica resultante, se conoce como ecuación característica del sistema y conduce a una ecuación polinómica en la incógnita ω^2 que tiene tantas soluciones como grados de libertad tiene la estructura.

$$\omega^{2n} + C_1 \cdot \omega^{2n-2} + C_2 \cdot \omega^{2n-4} + \dots + C_{n-1} \cdot \omega^2 + C_n = 0, \quad (5.12)$$

Las raíces de ecuación (5.12), corresponden a los valores propios (o frecuencias) en las cuales puede desarrollarse una vibración armónica, también denominados frecuencias normales o frecuencias propias que dependen de las propiedades del sistema (rigidez y masa).

En el caso de estructuras las matrices de masa y rigidez son reales, simétricas y definidas positivas, por consiguiente la ecuación (5.12) siempre tiene soluciones ω^2 positivas y en consecuencia los valores de ω_i , son reales.

Siguiendo una práctica convencional se ordenan las frecuencias normales de menor a mayor $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \dots < \omega_n$ y se agrupan en una matriz denominada espectral. La

matriz espectral tiene la siguiente forma [B-1]:

$$\underline{\underline{\Omega}} = \begin{bmatrix} \omega_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_n \end{bmatrix}, \quad (5.13)$$

A la menor frecuencia del sistema se le denomina frecuencia fundamental. Para cada valor de ω_i^2 que satisfaga la ecuación característica (5.10), puede resolver la ecuación:

$$(\underline{\underline{K}} - \omega_i^2 \cdot \underline{\underline{M}}) \cdot \underline{\underline{\Phi}}_i = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (5.14)$$

Y encontrar componentes del vector de amplitudes $\Phi_{1i}, \Phi_{2i}, \dots, \Phi_{ni}$ en términos de una constante de proporcionalidad arbitraria. Si se grafican estas coordenadas se obtiene un movimiento armónico de vibración, en el cual todas las masas de la estructura se mueven en fase con la misma frecuencia. Este movimiento, se denomina modo de vibración normal asociado a la frecuencia ω_i .

Para un sistema de tres grados de libertad, se tendría:

Para $i=1$,

$$\omega_1 \Rightarrow \underline{\underline{\Phi}}_1 = \begin{bmatrix} \Phi_{11} \\ \Phi_{21} \\ \Phi_{31} \end{bmatrix}, \quad \text{para la frecuencia fundamental} \quad (5.15)$$

Para $i = 2$,

$$\omega_2 \Rightarrow \underline{\Phi}_2 = \begin{bmatrix} \Phi_{12} \\ \Phi_{22} \\ \Phi_{32} \end{bmatrix}, \quad (5.16)$$

Para $i=3$,

$$\omega_3 \Rightarrow \underline{\Phi}_3 = \begin{bmatrix} \Phi_{13} \\ \Phi_{23} \\ \Phi_{33} \end{bmatrix}, \quad (5.17)$$

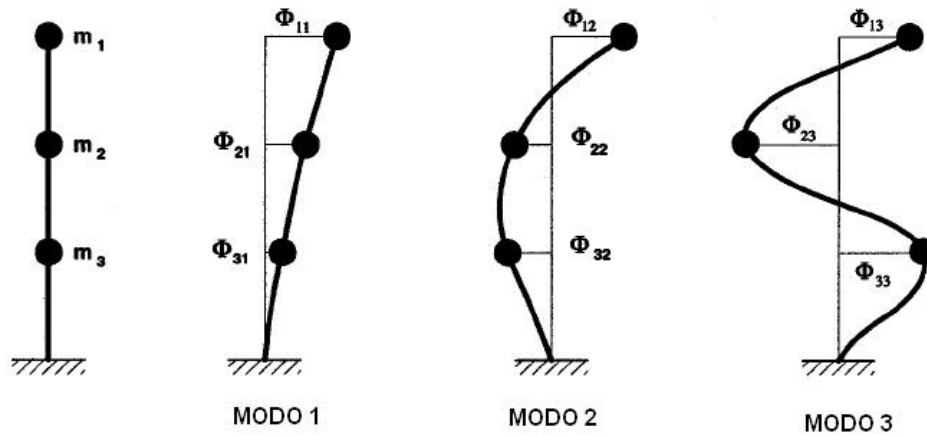


Figura 5.3. Modos de vibrar para la estructura de 3 niveles.

Estos modos pueden ser agrupados en la matriz modal $\underline{\underline{\Phi}}$, la cual contiene en sus columnas los respectivos autovectores ordenados de izquierda a derecha, partiendo con el autovector asociado a la frecuencia fundamental (modo 1) y terminando con el autovector asociado a la frecuencia máxima (modo n).

$$\underline{\underline{\Phi}} = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \dots & \Phi_{1j} & \dots & \Phi_{1n} \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \Phi_{ij} & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ \Phi_{n1} & \dots & \Phi_{nj} & \dots & \Phi_{nn} \end{bmatrix} = [\underline{\Phi}_1 \quad \dots \quad \underline{\Phi}_j \quad \dots \quad \underline{\Phi}_n], \quad (5.18)$$

5.3 Propiedades de ortogonalidad

Se puede demostrar que las formas naturales de vibración agrupadas en la matriz modal $\underline{\underline{\Phi}}$ constituyen un conjunto ortogonal completo con respecto a las matrices de masa $\underline{\underline{M}}$ y rigidez $\underline{\underline{K}}$. La propiedad de ortogonalidad de los autovectores y el concepto de coordenada normal $\underline{z}(t)$ serán la base del análisis modal. Análisis que nos permitirá resolver sistemas de ecuaciones acoplados, tal como los resultantes en sistemas de n grados de libertad.

Conocidas las frecuencias del sistema, $\omega_h \in \Re$ y los respectivos autovectores Φ_h , para dos frecuencias cualesquiera $\omega_i \neq \omega_j$ se tiene de (5.10):

$$\underline{\underline{K}} \cdot \underline{\Phi}_i - \omega_i^2 \cdot \underline{\underline{M}} \cdot \underline{\Phi}_i = 0, \quad (5.19)$$

$$\underline{\underline{K}} \cdot \underline{\Phi}_j - \omega_j^2 \cdot \underline{\underline{M}} \cdot \underline{\Phi}_j = 0, \quad (5.20)$$

Pre multiplicando la ecuación (5.19) por $-\underline{\Phi}_j^T$ y la ecuación (5.20) por $\underline{\Phi}_i^T$ se tiene:

$$-\underline{\Phi}_j^T \cdot \underline{\underline{K}} \cdot \underline{\Phi}_i + \omega_i^2 \cdot \underline{\Phi}_j^T \cdot \underline{\underline{M}} \cdot \underline{\Phi}_i = 0 / \cdot -\underline{\Phi}_j^T, \quad (5.21)$$

$$\underline{\Phi}_i^T \cdot \underline{\underline{K}} \cdot \underline{\Phi}_j - \omega_j^2 \cdot \underline{\Phi}_i^T \cdot \underline{\underline{M}} \cdot \underline{\Phi}_j = 0 / \cdot \underline{\Phi}_i^T, \quad (5.22)$$

Sumando (5.21) con (5.22) se llega:

$$\left[\omega_i^2 - \omega_j^2 \right] \cdot \underline{\Phi}_i^T \cdot \underline{\underline{M}} \cdot \underline{\Phi}_j = 0, \quad (5.23)$$

Puesto que $\omega_i \neq \omega_j \Rightarrow \underline{\Phi}_i^T \cdot \underline{\underline{M}} \cdot \underline{\Phi}_j = 0$, que es la propiedad de ortogonalidad de dos autovectores cualesquiera con respecto a la matriz de masa. Entonces se demuestra que:

$$\underline{\Phi}_i^T \cdot \underline{\underline{M}} \cdot \underline{\Phi}_j = 0 \text{ para } i \neq j \quad (5.24)$$

Se demuestra también que para el modo $j \Rightarrow \underline{\Phi}_j$:

$\underline{\underline{K}} \cdot \underline{\Phi}_j - \omega_j^2 \cdot \underline{\underline{M}} \cdot \underline{\Phi}_j = 0 \Rightarrow \underline{\underline{K}} \cdot \underline{\Phi}_j = \omega_j^2 \cdot \underline{\underline{M}} \cdot \underline{\Phi}_j$, multiplicando por $\underline{\Phi}_i^T$ se llega a:

$$\underline{\Phi}_i^T \cdot \underline{\underline{K}} \cdot \underline{\Phi}_j = \omega_j^2 \cdot \underline{\Phi}_i^T \cdot \underline{\underline{M}} \cdot \underline{\Phi}_j, \quad (5.25)$$

Pero como el lado derecho de la ecuación (5.25) es nulo debido a la ortogonalidad de la matriz de masa con respecto a dos autovectores diferentes con $\omega_i \neq \omega_j$, se tiene que también se cumple la condición de ortogonalidad con respecto a la matriz de rigidez.

$$\underline{\Phi}_i^T \cdot \underline{\underline{K}} \cdot \underline{\Phi}_j = 0 \text{ para } i \neq j \quad (5.26)$$

La demostración anterior puede verse desde otro punto de vista a partir de la ley de Betti, la cual plantea que el trabajo mecánico efectuado por las fuerzas del modo i con los desplazamientos del modo j es igual al trabajo mecánico efectuado por las fuerzas del modo j con los desplazamientos del modo i .

Fuerzas del modo i :

$$\underline{\underline{K}} \cdot \underline{\Phi}_i - \omega_i^2 \cdot \underline{\underline{M}} \cdot \underline{\Phi}_i = 0 \Rightarrow \underline{\underline{K}} \cdot \underline{\Phi}_i = \omega_i^2 \cdot \underline{\underline{M}} \cdot \underline{\Phi}_i \Rightarrow \underline{F}_i = \omega_i^2 \cdot \underline{\underline{M}} \cdot \underline{\Phi}_i \quad (5.27)$$

Fuerzas del modo j :

$$\underline{F}_j = \omega_j^2 \cdot \underline{\underline{M}} \cdot \underline{\Phi}_j \quad (5.28)$$

Calculando e igualando el trabajo de acuerdo a la ley de Betti, se tiene:

$$\underline{\Phi}_j^T \cdot \underline{F}_i = \underline{\Phi}_i^T \cdot \underline{F}_j \quad (5.29)$$

$$\underline{\Phi}_j^T \cdot \omega_i^2 \cdot \underline{\underline{M}} \cdot \underline{\Phi}_i = \underline{\Phi}_i^T \cdot \omega_j^2 \cdot \underline{\underline{M}} \cdot \underline{\Phi}_j \Rightarrow \quad (5.30)$$

$$\underline{\Phi}_j^T \cdot \omega_i^2 \cdot \underline{\underline{M}} \cdot \underline{\Phi}_i - \underline{\Phi}_i^T \cdot \omega_j^2 \cdot \underline{\underline{M}} \cdot \underline{\Phi}_j = 0$$

$$\underline{\Phi}_j^T \cdot \underline{\underline{M}} \cdot \underline{\Phi}_i \cdot [\omega_i^2 - \omega_j^2] = 0, \quad (5.31)$$

Puesto que $\omega_i \neq \omega_j$:

$$\underline{\Phi}_j^T \cdot \underline{\underline{M}} \cdot \underline{\Phi}_i = 0, \quad (5.32)$$

Que es la condición de ortogonalidad de la matriz de masa con respecto a dos auto

valores diferentes $i \neq j$.

5.4 Análisis Modal

Con el fin de desacoplar las ecuaciones de movimiento de (5.5) se utiliza una transformación de coordenadas que relacionan las coordenadas reales $\underline{y}(t)$ con un nuevo sistema de coordenadas denominado modales $\underline{z}(t)$, es decir:

$$\underline{y} = \underline{\Phi} \cdot \underline{z} = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \dots & \Phi_{1j} & \dots & \Phi_{1n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & \Phi_{ij} & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ \Phi_{n1} & \dots & \Phi_{nj} & \dots & \Phi_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_j \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\Phi}_1 & \dots & \underline{\Phi}_j & \dots & \underline{\Phi}_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_j \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}, \quad (5.33)$$

$$\underline{y} = \sum \underline{\Phi}_i \cdot z_i, \quad (5.34)$$

Realizando la transformación de coordenadas de ecuación (5.33), en la ecuación de movimiento (5.5) y pre multiplicando por la matriz modal traspuesta, se llega a:

$$\underline{M} \cdot (\underline{\Phi} \cdot \ddot{\underline{z}}) + \underline{C} \cdot (\underline{\Phi} \cdot \dot{\underline{z}}) + \underline{K} \cdot (\underline{\Phi} \cdot \underline{z}) = -\underline{M} \cdot \underline{1} \cdot \ddot{y}_s \quad / \cdot \underline{\Phi}^T \quad (5.35)$$

$$\underline{\Phi}^T \cdot \underline{M} \cdot (\underline{\Phi} \cdot \ddot{\underline{z}}) + \underline{\Phi}^T \cdot \underline{C} \cdot (\underline{\Phi} \cdot \dot{\underline{z}}) + \underline{\Phi}^T \cdot \underline{K} \cdot (\underline{\Phi} \cdot \underline{z}) = -\underline{\Phi}^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{1} \cdot \ddot{y}_s \quad (5.36)$$

En donde, se define la matriz de masa generalizada (matriz de masa modal):

$$\underline{\Phi}^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{\Phi} = \underline{M}^* \Rightarrow \underline{\Phi}_j^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{\Phi}_j = M_j^* \quad (5.37)$$

Matriz de amortiguamiento generalizado:

$$\underline{\underline{\Phi}}^T \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{\Phi}} = \underline{\underline{C}}^*, \quad (5.38)$$

Matriz de rigidez generalizada (matriz de rigidez modal):

$$\underline{\underline{\Phi}}^T \cdot \underline{\underline{K}} \cdot \underline{\underline{\Phi}} = \underline{\underline{K}}^* \Rightarrow \underline{\underline{\Phi}}_j^T \cdot \underline{\underline{K}} \cdot \underline{\underline{\Phi}}_j = K_j^*, \quad (5.39)$$

Puesto que las matrices de masa y rigidez son ortogonales con respecto a la matriz modal se verifica que dichas matrices solo contienen términos en la diagonal principal. La matriz de amortiguamiento generalizado de momento se supondrá diagonal:

$$\underline{\underline{M}}^* = \begin{bmatrix} M_1^* & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & M_j^* & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & M_n^* \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{C}}^* = \begin{bmatrix} C_1^* & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & C_j^* & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & C_n^* \end{bmatrix} \quad (5.40)$$

$$\underline{\underline{K}}^* = \begin{bmatrix} K_1^* & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & K_j^* & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & K_n^* \end{bmatrix}, \quad (5.41)$$

Los términos del lado derecho de la ecuación (5.36), se pueden reescribir como:

$$\underline{\underline{L}} = \underline{\underline{\Phi}}^T \cdot \underline{\underline{M}} \cdot \underline{\underline{1}} \Rightarrow L_j = \underline{\underline{\Phi}}_j^T \cdot \underline{\underline{M}} \cdot \underline{\underline{1}}, \quad (5.42)$$

Luego, la ecuación diferencial (5.36) para la coordenada normal j en términos de los parámetros generalizados se expresa por:

$$M_j^* \cdot \ddot{z}_j + C_j^* \cdot \dot{z}_j + K_j^* \cdot z_j = -L_j \cdot \ddot{y}_s, \quad (5.43)$$

$$\ddot{z}_j + \frac{C_j^*}{M_j^*} \cdot \dot{z}_j + \frac{K_j^*}{M_j^*} \cdot z_j = -\frac{L_j}{M_j^*} \cdot \ddot{y}_s, \quad (5.44)$$

Donde:

$$\Gamma_j = \frac{L_j}{M_j^*} = \frac{\underline{\Phi}_j^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{1}}{\underline{\Phi}_j^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{\Phi}_j} = \frac{\sum_{i=1}^n M_i \Phi_{ij}}{\sum_{i=1}^n M_i \Phi_{ij}^2} \quad (5.45)$$

$$\ddot{z}_j + (2 \cdot \xi_j \cdot \omega_j) \cdot \dot{z}_j + \omega_j^2 \cdot z_j = -\Gamma_j \cdot \ddot{y}_s, \quad (5.46)$$

En donde Γ_j se denomina factor de participación modal del modo j y es una medida de la contribución del modo j a la respuesta total del sistema.

De esta forma el sistema de n grados de libertad de ecuación (5.5) se ha transformado en n sistemas de un grado de libertad cada uno de ellos. En este nuevo formato, el problema se transforma en la solución de n ecuaciones independientes en la coordenada $z_j(t)$, las cuales pueden resolverse con los métodos y procedimientos utilizados para sistemas de un grado de libertad vistos en el capítulo 2 y 3 del presente texto.

El procedimiento anterior se denomina desacoplamiento modal de las ecuaciones de equilibrio dinámico. Gráficamente, el desacoplamiento modal se presenta en la Figura

5.4 para un edificio de cuatro pisos sin amortiguamiento estructural, la interpretación del proceso de desacoplamiento, es que el comportamiento dinámico de una estructura de varios grados de libertad se puede descomponer en varios sistemas independientes de un grado de libertad cada uno cuyas características dependen de los parámetros generalizados de vibración de la estructura.

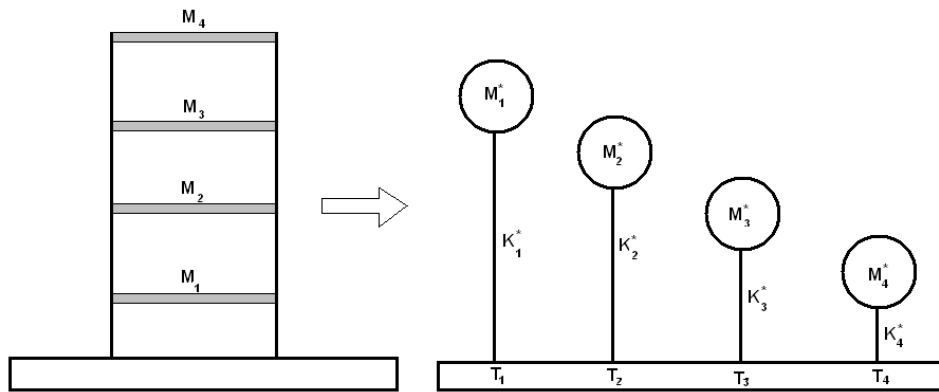


Figura 5.4. Representación gráfica del desacoplamiento modal [C-1], [CH-1].

En el análisis dinámico de estructuras de varios grados de libertad el efecto del amortiguamiento estructural se considera separadamente en cada uno de los modos de vibrar.

5.5 Normalización de ecuaciones

Muchas veces resulta cómodo desde el punto de vista de las ecuaciones de movimiento desacopladas, normalizar la matriz de masa, amortiguamiento y rigidez, utilizando una forma particular de la matriz modal.

Con esto se busca que:

$$\underline{\underline{\Phi}}^T \cdot \underline{\underline{M}} \cdot \underline{\underline{\Phi}} = \underline{\underline{I}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (5.47)$$

$$\underline{\underline{\Phi}}^T \cdot \underline{\underline{K}} \cdot \underline{\underline{\Phi}} = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_3^2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\Omega}}^2, \quad (5.48)$$

Donde $\underline{\underline{\Omega}}^2$ es la matriz espectral (5.13) al cuadrado y $\underline{\underline{\Phi}}$ es la matriz modal normal, la cual se obtiene al dividir cada una de las columnas de la matriz modal (5.18) por un factor de escala.

Dicho factor de escala corresponde a las respectivas raíces cuadradas de la diagonal de la matriz de masa generaliza $\sqrt{M_i^*}$ de ecuación (5.37). Nótese que el factor de participación modal $\Gamma_j = \frac{L_j}{M_j^*}$ depende del método utilizado para escalar las formas

modales luego si utilizamos la matriz modal normal: $\Gamma_j = L_j$ puesto que $M_j^* = 1$.

$$\underline{\underline{\Phi}} = \begin{bmatrix} \frac{\Phi_{11}}{\sqrt{M_1^*}} & \dots & \frac{\Phi_{1j}}{\sqrt{M_j^*}} & \dots & \frac{\Phi_{1n}}{\sqrt{M_n^*}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \frac{\Phi_{ij}}{\sqrt{M_j^*}} & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \frac{\Phi_{n1}}{\sqrt{M_1^*}} & \dots & \frac{\Phi_{nj}}{\sqrt{M_j^*}} & \dots & \frac{\Phi_{nn}}{\sqrt{M_n^*}} \end{bmatrix}, \quad (5.49)$$

Que corresponde a la matriz de modal normal. Dicha matriz satisface sobre la matriz de masa y de rigidez las condiciones (5.47) y (5.48).

Para el análisis sísmico es conveniente a utilizar el concepto de masa equivalente, el cual es útil para reducir el número de cálculos involucrado en los parámetros de diseño. Dado que el valor máximo de la respuesta modal se encuentra asociado al valor máximo del lado derecho de la ecuación (5.46), es decir, se encuentra asociado al valor del desplazamiento espectral S_{D_j} multiplicado por el factor de participación modal del respectivo modo j .

$$\underline{y} = \sum \underline{\Phi}_j \cdot z_j \Rightarrow \underline{y}_j^{max} = \underline{\Phi}_j \cdot z_j^{max} = \underline{\Phi}_j \cdot (\Gamma_j \cdot S_{D_j}), \quad (5.50)$$

Las fuerzas de corte sobre la estructura:

$$\underline{f} = \underline{K} \cdot \underline{y} = \underline{K} \cdot (\underline{\Phi} \cdot \underline{z}), \quad (5.51)$$

$$\underline{f} = \underline{K} \cdot [\underline{\Phi}_1 \cdot z_1 + \dots + \underline{\Phi}_j \cdot z_j + \dots + \underline{\Phi}_n \cdot z_n], \quad (5.52)$$

Luego, la fuerza de corte máxima asociada al modo j considerando la propiedad de ecuación (5.24):

$$\underline{f}_j^{max} = \underline{K} \cdot \underline{\Phi}_j \cdot z_j^{max} = \underline{K} \cdot \underline{\Phi}_j \cdot (\Gamma_j \cdot S_{D_j}) = \omega_j^2 \underline{M} \cdot \underline{\Phi}_j \cdot \Gamma_j \cdot S_{D_j}, \quad (5.53)$$

El esfuerzo de corte que considera la contribución de cada uno de los modos de vibrar, se define por:

$$\underline{f} = \sum_{j=1}^n \underline{f}_j = \sum_{j=1}^n \omega_j^2 \cdot \underline{M} \cdot \underline{\Phi}_j \cdot \Gamma_j \cdot S_{D_j}, \quad (5.54)$$

El corte basal se expresa como la suma de todas contribuciones modales:

$$Q_b = \underline{1}^T \cdot \underline{f} = \sum_{j=1}^n (\underline{1}^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{\Phi}_j) \cdot \Gamma_j \cdot S_{D_j} \cdot \omega_j^2, \quad (5.55)$$

En donde:

$$\underline{1}^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{\Phi}_j = \sum_{i=1}^n M_i \Phi_{ij} = L_j, \quad (5.56)$$

Quedando, la siguiente expresión:

$$Q_b = \sum_{j=1}^n (L_j \cdot \Gamma_j \cdot S_{D_j} \cdot \omega_j^2) = \sum_{j=1}^n (L_j \cdot \frac{L_j}{M_j^*} \cdot S_{D_j} \cdot \omega_j^2) = \sum_{j=1}^n (\frac{L_j^2}{M_j^*} \cdot S_{D_j} \cdot \omega_j^2), \quad (5.57)$$

Introduciendo el parámetro M_j^E , denominado masa equivalente del modo j :

$$M_j^E = \frac{L_j^2}{M_j^*} \text{ o } M_j^E = \frac{[\Gamma_j M_j^*]^2}{M_j^*} = \Gamma_j^2 \cdot M_j^* \quad (5.58)$$

$$\sum_{j=1}^n M_j^E = \sum_{j=1}^n M_j = M_{TOTAL}$$

$$Q_b = \sum_{j=1}^n (M_j^E \cdot S_{D_j} \cdot \omega_j^2), \quad (5.59)$$

Nótese que la masa modal equivalente asociada al modo j se puede dejar expresada en función del factor de participación modal Γ_j^2 por la masa modal o generalizada del respectivo modo. Puesto que existe la siguiente relación entre las cantidades espectrales:

$$S_{A_j} = S_{D_j} \cdot \omega_j^2, \quad (5.60)$$

Entonces, el corte basal de ecuación (5.59) se puede expresar en función de la masa modal equivalente como:

$$Q_b = \sum_{j=1}^n (M_j^E \cdot S_{A_j}), \quad (5.61)$$

No obstante lo anterior, para evaluar el corte basal máximo Q_b^{max} se deberá aplicar algún criterio de superposición modal, dado que las aceleraciones espectrales, ocurren en diferentes instantes de tiempo (distintos periodos) y por consiguiente no es posible sumarmas en forma directa, además nace la pregunta, si es necesario considerar la contribución de todas las formas modales, más aun, cuando las frecuencias superiores contienen errores numéricos propios de los métodos del cálculo de auto-valores. En este sentido, no hay guías para determinar cuántos modos de vibrar deberían ser incluidos en el análisis modal, dado que esto depende de las características de la estructura y de las ordenadas del espectro utilizado. Sin embargo, el análisis debería incluir el número suficiente de modos hasta esta alcanzar un error del 5% con respecto a la solución “exacta”. Puesto que la respuesta “exacta” no se conoce, un procedimiento de prueba y error se debería adoptar, hasta que la adición de un modo adicional no afecte significativamente la respuesta con respecto al análisis que considera menos modos.

En el caso particular de la NCh433-Of 96-Mod 2012, en su punto (6.3.3) considera que:

“Se debe incluir en el análisis todos los modos normales ordenados según valores crecientes de las frecuencias propias, que sean necesarios para que la suma de las masas equivalentes para cada una de las dos acciones sísmicas sea mayor o igual a un 90% de la masa total”.

Nótese que:

1. La suma de las masas modales equivalentes para todos los modos es igual a la suma de todos los términos de diagonal de la matriz de masa, es decir, la masa total de la estructura.
2. Para efectos del análisis modal espectral es suficiente considerar un número de modos de vibrar tal que la suma de sus masas modales equivalentes, no sean menores al 90% de la masa total de la estructura.

5.6 Métodos de superposición modal

La solución de las ecuaciones diferenciales desacopladas de (5.46) puede realizarse mediante la integración en el tiempo (métodos paso a paso, capítulo 3) de las ecuaciones de movimiento, la cual entrega la solución a estas ecuaciones para cualquier patrón de fuerzas exteriores aplicadas al sistema ya sea con comportamiento lineal o no lineal del sistema.

Para el caso de estructuras con comportamiento elástico lineal una forma sencilla de estimar un límite superior para la respuesta máxima, es el método de superposición directa de los máximos modales, el cual permite definir un límite superior para la respuesta utilizando los valores absolutos de cada una de las contribuciones modales máximas:

$$y_i^{\max} = \left| \Phi_{i1} \cdot z_1^{\max} \right| + \dots + \left| \Phi_{ij} \cdot z_j^{\max} \right| + \dots + \left| \Phi_{in} \cdot z_n^{\max} \right|, \quad (5.61)$$

Sin embargo los resultados obtenidos con este método sobreestiman la respuesta.

Otro método bastante utilizado y que da una estimación razonable de la respuesta máxima calculada a partir de los valores espectrales es el método de la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las contribuciones modales (SRSS) (propuesto por Newmark y Rosenblueth, 1971):

$$y_i^{\max} = \sqrt{(\Phi_{i1} \cdot z_1^{\max})^2 + \dots + (\Phi_{ij} \cdot z_j^{\max})^2 + \dots + (\Phi_{in} \cdot z_n^{\max})^2}, \quad (5.62)$$

Método que en la mayoría de los problemas 2D resulta ventajoso y funciona bien, sin embargo en análisis 3D de edificios asimétricos, en donde es común encontrarse con dos frecuencias muy cercanas (del orden de un 10%), la aplicación directa del método SRSS, puede subestimar o sobreestimar la respuesta, siendo recomendable utilizar el método de Combinación cuadrática Completa (CQC) (Wilson, Der Kiureghian y Bayo, 1981) [CH-1].

El método CQC, se basa en la teoría de vibraciones aleatorias y puede ser utilizado en el análisis modal espectral si la duración de la parte asociada al moviendo fuerte del sismo, es varias veces más grande que el periodo fundamental de la estructura y las ordenadas del espectro de respuesta varían suavemente sobre un rango amplio de periodos que incluyen a los modos dominantes de la estructura.

$$y_k^{\max} = \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n z_{ki} \rho_{ij} z_{kj} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (5.63)$$

Donde z_{ki} y z_{kj} son los desplazamientos modales máximos correspondientes a los modos de vibrar i y j respectivamente y n es el número de modos. Los coeficientes ρ_{ij} de acoplamiento entre los modos i y j para un ξ constante se definen por [CH-1]:

$$\rho_{ij} = \frac{8\xi^2(1+r_{ij})r_{ij}^{3/2}}{(1-r_{ij}^2)^2 + 4\xi^2r_{ij}(1+r_{ij})^2} \quad (5.64)$$

Donde r se define como la razón de frecuencias entre los modos i, j :

$$r_{ij} = \frac{\omega_i}{\omega_j} \text{ o } r_{ij} = \frac{T_j}{T_i} \quad (5.65)$$

Nótese en (5.65), que cuando $\omega_i = \omega_j \Rightarrow r_{ii} = r_{jj} = 1$ y $\rho_{ij} = 1$. Ver figura 5.5

Es importante notar que si el coeficiente de acoplamiento ρ_{ij} depende del grado o razón de amortiguamiento. Si estos coeficientes se ordenan en una matriz (ver Figura 5.4), la matriz resulta simétrica y todos los términos son positivos.

Modo	1	2	3	Frecuencias $\frac{rad}{s}$
1	1	ρ_{12}	ρ_{13}	ω_1
2	sim	1	ρ_{21}	ω_2
3	sim	sim	1	ω_3

Figura 5.4. Matriz de correlación entre coeficientes de acoplamiento, para una estructura de tres grados de libertad.

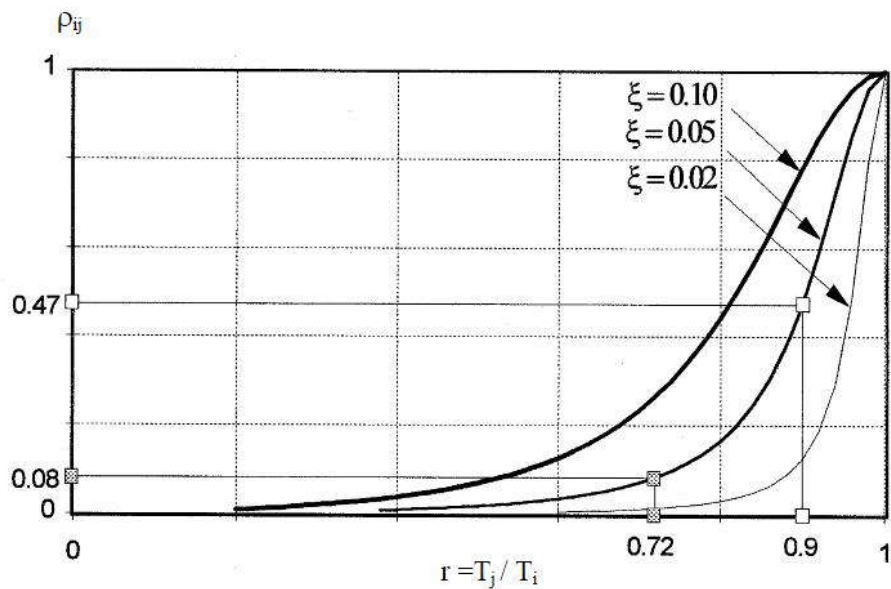


Figura 5.5. Coeficientes de acoplamiento.

(Fuente: <http://140.194.76.129/publications/eng-manuals/em1110-2-6050/c-2.pdf>)

Para una estructura sin amortiguación, el método CQC es idéntico al método SRSS. También cabe mencionar, que si las frecuencias están bastante separadas, el criterio CQC, proporciona valores similares al criterio SRSS.

Dentro de las ventajas del análisis modal se tiene [B-1]:

El sistema de ecuaciones diferenciales se desacopla, pudiéndose solucionar cada una de las ecuaciones en forma independiente.

1. Se ha comprobado que la respuesta de un sistema se puede aproximar bien, incluyendo en el cálculo solamente los primeros modos de vibrar. Recordemos que para efectos del análisis modal espectral es suficiente considerar un número de modos de vibrar tal que la suma de sus masas modales equivalentes no sean menores al 90% de la masa total de la estructura.

Las desventajas son:

1. Gran esfuerzo computacional para solucionar el problema de valores y vectores propios.
2. El procedimiento es válido solo en problemas elásticos.

5.7 Efecto del amortiguamiento

La matriz de amortiguamiento $\underline{\underline{C}}$ de ecuación (5.1), debe ser tal que los modos de vibrar con respecto a ella, posean propiedades de ortogonalidad similares a las que tienen las matrices de masa y rigidez de forma que sea posible el desacoplamiento de la ecuación (5.2).

Es decir, debe cumplirse que:

$$\underline{\Phi}_i^T \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\Phi}_j = 0 \text{ para } i \neq j \quad (5.66)$$

$$\underline{\Phi}_j^T \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\Phi}_j = C_j^* \text{ para } i = j \quad (5.67)$$

$$C_j^* = 2 \cdot \xi_j \cdot \omega_j \cdot M_j^*, \quad (5.68)$$

Una aproximación sencilla para describir el amortiguamiento global de la estructura y tener una solución cerrada a la ecuación de movimiento, es que la matriz de amortiguamiento satisfaga las condiciones de ortogonalidad. Lo anterior se puede lograr si esta se construye proporcional a la matriz de masa $\underline{\underline{M}}$ y de rigidez $\underline{\underline{K}}$ (puesto que ambas matrices son ortogonales con respecto a la matriz modal $\underline{\underline{\Phi}}$), este tipo de amortiguamiento recibe el nombre de amortiguamiento del tipo Rayleigh FEMA 451 [F-1], [CH-1].

$$\underline{\underline{C}} = \alpha \cdot \underline{\underline{M}} + \beta \cdot \underline{\underline{K}}, \quad (5.69)$$

En donde α y β son constantes a determinar con unidades $\frac{1}{s}$ y s respectivamente.

Para que la ecuación de movimiento pueda desacoplar los términos asociados a la matriz de amortiguamiento, se debe tener que:

$$\underline{\Phi}_i^T \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\Phi}_i = \alpha \cdot [\underline{\Phi}_i^T \cdot \underline{\underline{M}} \cdot \underline{\Phi}_i] + \beta \cdot [\underline{\Phi}_i^T \cdot \underline{\underline{K}} \cdot \underline{\Phi}_i] = 2 \cdot \xi_i \cdot \omega_i \cdot M_i^*, \quad (5.70)$$

Puesto que $\underline{\underline{M}}$ y $\underline{\underline{K}}$ son ortogonales con respecto a $\underline{\Phi}$, se tiene que:

$$\alpha \cdot M_i^* + \beta \cdot K_i^* = 2 \cdot \xi_i \cdot \omega_i \cdot M_i^*, \quad (5.71)$$

$$\alpha \cdot M_i^* + \beta \cdot \omega_i^2 \cdot M_i^* = 2 \cdot \xi_i \cdot \omega_i \cdot M_i^*, \quad (5.72)$$

$$\xi_i = \frac{\alpha}{2\omega_i} + \frac{\beta}{2} \cdot \omega_i, \quad (5.73)$$

Los coeficientes α y β pueden ser determinados a partir de dos razones de amortiguamiento especificadas. Suponiendo que ξ_m y ξ_n se conocen y reemplazando en (5.73), se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = 2 \cdot \frac{\omega_m \cdot \omega_n}{(\omega_n^2 - \omega_m^2)} \cdot \begin{bmatrix} \omega_n & -\omega_m \\ -1/\omega_n & 1/\omega_m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \xi_m \\ \xi_n \end{bmatrix}, \quad (5.74)$$

Un caso particular, que permite obtener estos coeficientes en forma rápida, es asumir que dos modos tienen el mismo amortiguamiento ξ :

$$\alpha = \xi \frac{2 \omega_m \omega_n}{(\omega_m + \omega_n)} \text{ y } \beta = \xi \frac{2}{(\omega_m + \omega_n)} \quad (5.75)$$

Para aplicar este procedimiento, el grado amortiguamiento en cada modo se escoge para asegurar valores razonables de ξ en todos los modos que contribuyen significativamente a la respuesta dinámica. Graficando ecuación (5.73) (ver Figura 5.6), se concluye que este modelo, resulta útil para el rango de frecuencias que están dentro de (ω_i, ω_j) y que para el resto de frecuencias se genera un sobre amortiguamiento estructural. Usualmente se eligen como frecuencias ω_i y ω_j , a las asociadas a los modos con mayor masa traslacional que afecten a la estructura, hasta la frecuencia que permite completar el 90% de la masa total.

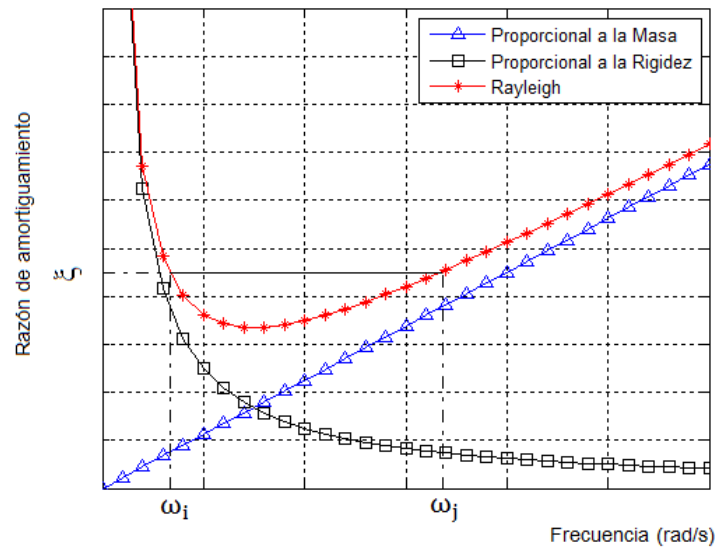


Figura 5.6. Amortiguamiento del tipo Rayleigh rango de frecuencias ω_i y ω_j .

Como ejemplo, supónganse que se especifica que el amortiguamiento para los modos 1 y 3 es de un 5% con respecto al valor crítico y que se conocen las frecuencias del sistema:

Tabla 5.1: Frecuencias

Modo	$\omega (rad/s)$
1	4.94
2	14.6
3	25.9
4	39.2
5	52.8

Para construir la ecuación de la curva de fracción de amortiguamiento (5.73), es necesario definir el valor de los coeficientes α y β , evaluando con $\xi_1 = \xi_3 = 0.005$ y $\omega_1 = 4.94$, $\omega_3 = 25.9$ se tiene:

$$\alpha = 0.41487$$

$$\beta = 0.00324$$

$$\xi_i = \frac{0.20743}{\omega_i} + 0.00162 \cdot \omega_i, \quad (5.76)$$

El valor de la fracción de amortiguamiento ξ_i se presenta en la Figura 5.7:

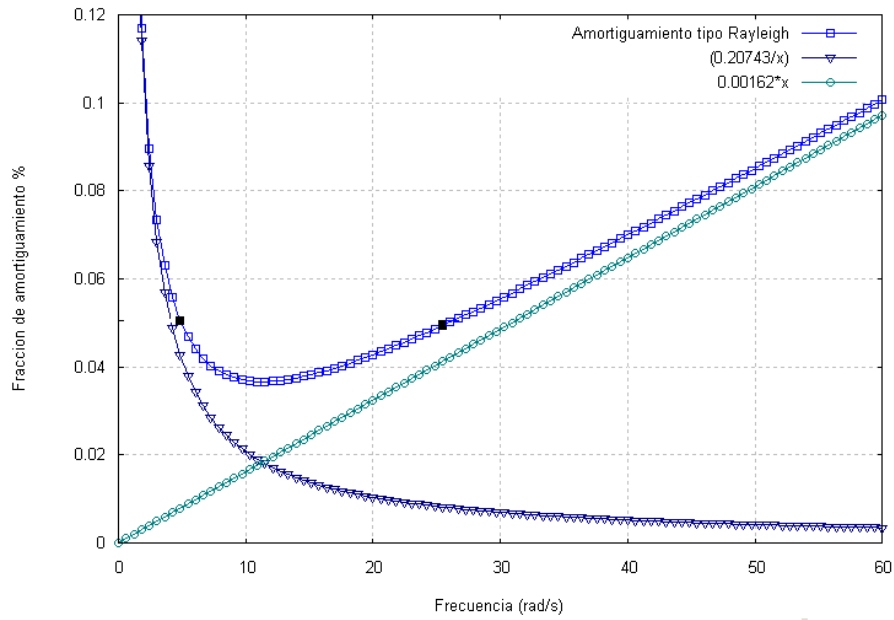


Figura 5.7. Variación del amortiguamiento del tipo Rayleigh.

Para este ejemplo, se concluye que para frecuencias altas (modos 4 y 5) los valores de la fracción de amortiguamiento crítico podrían ser sobre estimados y para la frecuencia 2 el valor de la fracción de amortiguamiento crítico podría ser sub-estimado.

Otro tipo de amortiguamiento utilizado es el denominado Caughey, en donde para calcular el amortiguamiento en más de dos modos se considera la siguiente forma:

$$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{M}} \sum_{i=0}^{N-1} \alpha_i [\underline{\underline{M}}^{-1} \underline{\underline{K}}]^i, \quad (5.77)$$

En donde N es el número de grados de libertad y α_i son contantes a determinar.

Desarrollando los primeros tres términos de esta serie, se tiene:

$$\underline{\underline{M}} [\alpha_0 [\underline{\underline{M}}^{-1} \underline{\underline{K}}]^0 + \alpha_1 [\underline{\underline{M}}^{-1} \underline{\underline{K}}]^1 + \alpha_2 [\underline{\underline{M}}^{-1} \underline{\underline{K}}]^2] = \alpha_0 \underline{\underline{M}} + \alpha_1 \underline{\underline{K}} + \alpha_2 \underline{\underline{K}} \underline{\underline{M}}^{-1} \underline{\underline{K}}, \quad (5.78)$$

Está claro que los dos primeros términos corresponden al amortiguamiento de Rayleigh. En este caso, el grado de amortiguamiento ξ_j para cada modo, se puede estimar desacoplando la matriz de amortiguamiento:

$$\underline{\underline{\Phi}}^T \underline{\underline{C}} \underline{\underline{\Phi}} = \underline{\underline{\Phi}}^T \left[\alpha_0 \underline{\underline{M}} + \alpha_1 \underline{\underline{K}} + \alpha_2 \underline{\underline{K}} \underline{\underline{M}}^{-1} \underline{\underline{K}} \right] \underline{\underline{\Phi}}, \quad (5.79)$$

$$2 \xi_j m_j^* \omega_j = \alpha_0 m_j^* + \alpha_1 k_j^* + \alpha_2 k_j^* \frac{k_j^*}{m_j^*}, \quad (5.80)$$

$$\xi_j = \frac{\alpha_0}{2\omega_j} + \frac{\alpha_1}{2} \omega_j + \alpha_2 \frac{\omega_j^3}{2}, \quad (5.81)$$

Dentro de los problemas encontrados en el modelo de Caughey se destaca el hecho que los términos α_i pueden resultar valores negativos, los cuales deben ser removidos *a posteriori* pues reducen el amortiguamiento considerado inicialmente.

CAPITULO 6

APLICACIONES A SISTEMAS DE N GRADOS DE LIBERTAD

6.1 Introducción

A continuación se presentan una serie de ejemplos de sistemas de múltiples grados de libertad, ejemplos que en su mayoría han sido aplicados en pruebas y certámenes en la Universidad de Concepción en los últimos 10 años (2009-2019).

Con un espíritu didáctico y académico, he tratado de ser lo más explícito en los pasos y procedimiento de solución, espero que esto se entienda así.

6.2 Ejemplos de aplicación

6.2.1 Estimación del drift en marco de dos pisos

La estructura de la Figura 6.1, consiste en un marco de dos pisos con sus respectivos diafragmas rígidos (columnas con $EA \rightarrow \infty$ y vigas con $EI \rightarrow \infty$) el cual debe ser diseñado para resistir cargas sísmicas de acuerdo al espectro de diseño definido en la Figura 6.2 (el cual considera un amortiguamiento del 5%).

Considerando que la rigidez horizontal de las columnas vale $K = 30000 \frac{kN}{m}$, se pide:

1. Determinar el valor de la masa “M” en toneladas (T) para que el periodo fundamental de la estructura no exceda los 0.4 s.
2. Determinar los desplazamientos máximos de entrepiso (utilice el criterio de superposición modal SRSS).
3. Comente los resultados en el contexto que los de desplazamientos máximos de entrepiso no deberían ser mayores al 2 por mil de H de la altura del entrepiso. ¿Qué acciones ingenieriles aplicaría para limitar dichos desplazamientos, en el caso que no se cumpliera con la restricción?

4. Estime la matriz de Amortiguamiento proporcional del tipo Rayleigh considerando que ambos modos tienen un amortiguamiento del 5%.
5. Determine el valor del cortante basal asociado a la excitación.

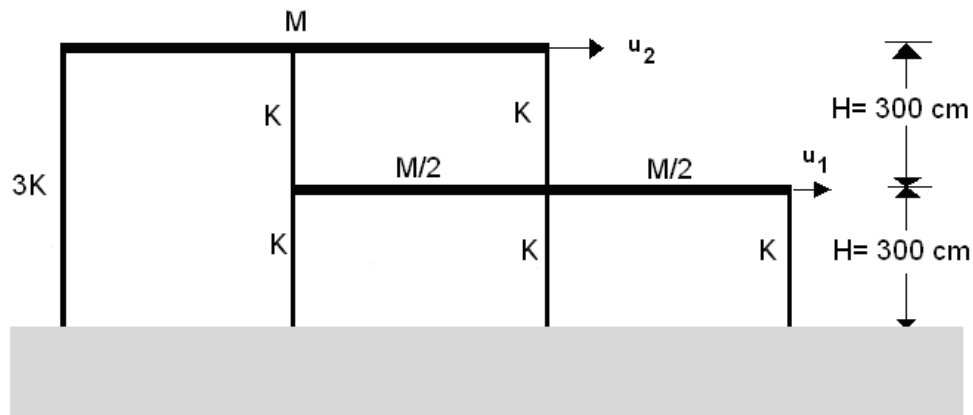


Figura 6.1. Marco Plano con diafragmas horizontales rígidos.

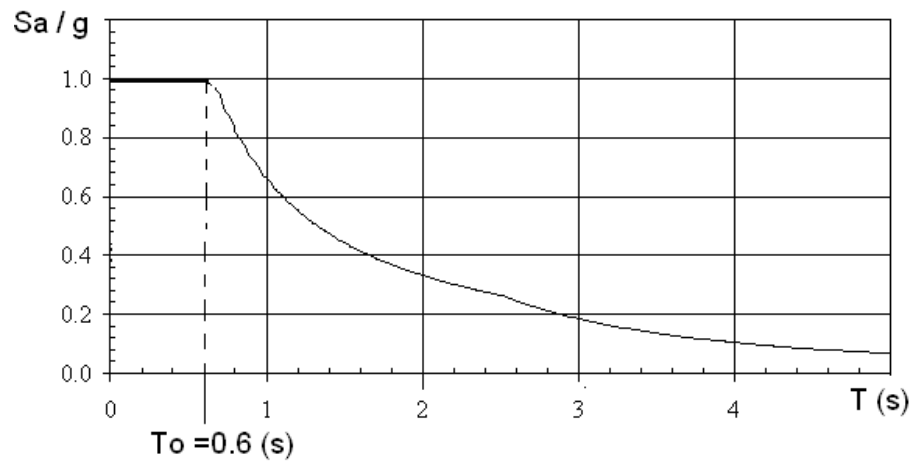


Figura 6.2. Espectro de Diseño asociado a un amortiguamiento del 5% del crítico.

Para el cálculo de la matriz de rigidez horizontal y la matriz de masa, se procede a dar un desplazamiento unitario en el grado de libertad correspondiente y dejando fijo los restantes grados de libertad de la estructura, ver Figura 6.3:

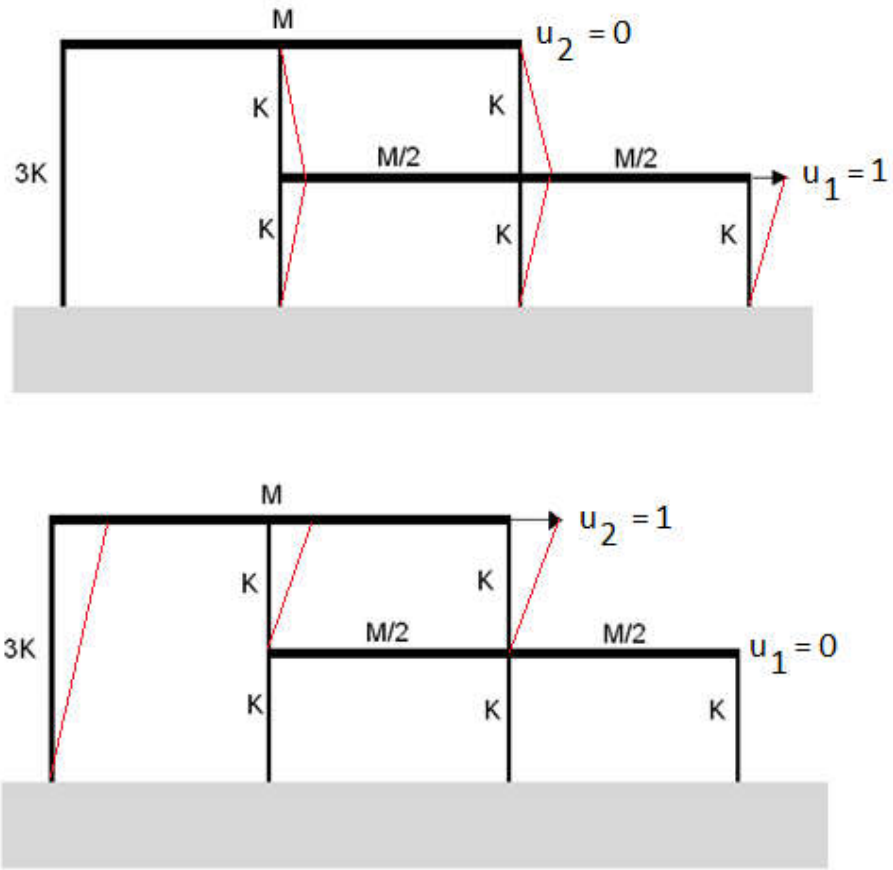


Figura 6.3. Estados de desplazamiento unitario.

$$\underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix} 5k & -2k \\ -2k & 5k \end{bmatrix} \frac{kN}{m} \quad y \quad \underline{\underline{M}} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} T, \quad (6.1)$$

$$\det[\underline{\underline{K}} - \lambda \underline{\underline{M}}] = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 10 \frac{k}{m} \lambda + 21 \left(\frac{k}{m} \right)^2 = 0 \quad \text{con } \lambda = \omega^2 \quad (6.2)$$

$$\omega_1 = \sqrt{3 \frac{k}{m}} \quad y \quad \omega_2 = \sqrt{7 \frac{k}{m}} \Rightarrow T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} \leq 0.4 \Rightarrow \omega_1 \geq 5\pi \quad (6.3)$$

$$\sqrt{3 \frac{k}{m}} = 5\pi \Rightarrow m = \frac{3k}{25\pi^2} = 365 \, T \quad (6.4)$$

Luego la matriz masa vale:

$$\underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix} 150000 & -60000 \\ -60000 & 150000 \end{bmatrix} \frac{kN}{m} \quad y \quad \underline{\underline{M}} = \begin{bmatrix} 365 & 0 \\ 0 & 365 \end{bmatrix} T, \quad (6.5)$$

Verificando si se obtiene la frecuencia fundamental definida por el problema, se tiene:

$$\det[\underline{\underline{K}} - \lambda \underline{\underline{M}}] = 0 \Rightarrow \omega_1 = 15.70 \frac{rad}{s} \quad (T_1 = 0.40 \text{ s}) \quad y \quad (6.6)$$

$$\omega_2 = 23.99 \frac{rad}{s} \quad (T_2 = 0.26 \text{ s})$$

Luego se procede a estimar la respectiva matriz modal normal, asociada a las frecuencias calculadas anteriormente:

$$\underline{\underline{\Phi}} = \begin{bmatrix} 0.0371 & 0.0371 \\ 0.0371 & -0.0371 \end{bmatrix}, \quad (6.7)$$

En resumen se tiene que:

Modos	1	2
Frecuencia angular $\frac{rad}{s}$	15.70	23.99
Periodo s	0.40	0.26
1 ^{er} piso	0.0371	0.0371
2 ^{do} piso	0.0371	-0.0371

Tabla 6.1.: Propiedades dinámicas de la estructura.

Matriz de masa generalizada:

$$\underline{\underline{M}}^* = \begin{bmatrix} M_1^* & 0 \\ 0 & M_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0371 & 0.0371 \\ 0.0371 & -0.0371 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 365 & 0 \\ 0 & 365 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.0371 & 0.0371 \\ 0.0371 & -0.0371 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (6.8)$$

Factor de participación modal:

$$\underline{\underline{\Gamma}} = \frac{\underline{\underline{\Phi}}^T \cdot \underline{\underline{M}} \cdot \underline{\underline{1}}}{\underline{\underline{M}}^*} = \begin{bmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (6.9)$$

Lectura desde el espectro de aceleraciones de Figura 6.2, para cada uno de los periodos:

$$T_1 = 0.40 \text{ s} \Rightarrow \frac{S_{a_1}}{g} = 1 ; T_2 = 0.26 \text{ s} \Rightarrow \frac{S_{a_2}}{g} = 1, \quad (6.10)$$

Conocida la aceleración espectral, es posible estimar los desplazamientos máximos para cada frecuencia:

$$\begin{bmatrix} z_1^{\max} \\ z_2^{\max} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma_1 \times S_{d_1} \\ \Gamma_2 \times S_{d_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma_1 \times \frac{S_{a_1}}{\omega_1^2} \\ \Gamma_2 \times \frac{S_{a_2}}{\omega_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 \times \frac{9.8}{15.70^2} \\ 0 \times \frac{9.8}{23.99^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.073 \\ 0 \end{bmatrix} m, \quad (6.11)$$

Luego los desplazamientos reales serán:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0371 & 0.0371 \\ 0.0371 & -0.0371 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1.073 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0371 \cdot 1.073 + 0.0371 \cdot 0 \\ 0.0371 \cdot 1.073 - 0.0371 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.04 \\ 0.04 \end{bmatrix} m, \quad (6.12)$$

Aplicando el criterio de superposición SRSS:

$$\begin{bmatrix} y_1^{\max} \\ y_2^{\max} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{(0.0371 \cdot 1.073)^2 + (0.0371 \cdot 0)^2} \\ \sqrt{(0.0371 \cdot 1.073)^2 + (-0.0371 \cdot 0)^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.04 \\ 0.04 \end{bmatrix} m, \quad (6.13)$$

Luego los desplazamientos relativos de entre-piso:

$$\begin{bmatrix} \Delta_1^{\max} \\ \Delta_2^{\max} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{0.04 - 0}{3} \\ \frac{0.04 - 0.04}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0133 \\ 0.0 \end{bmatrix} m, \quad (6.14)$$

$$\Rightarrow \Delta_1^{\max} = 0.0133 \geq \frac{2}{1000} \Rightarrow NO !$$

El desplazamiento relativo del piso 1, es superior al $\frac{2}{1000}$ por consiguiente se debe aumentar la rigidez horizontal de las columnas para satisfacer este límite.

Calculo de la matriz de amortiguamiento del tipo Rayleigh:

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = 2 \frac{(15.70) \cdot (23.99)}{15.70^2 - 23.99^2} \begin{bmatrix} \frac{15.70}{1} & -\frac{23.99}{1} \\ -\frac{1}{15.70} & \frac{1}{23.99} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.05 \\ 0.05 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.95 \\ 0.0023 \end{bmatrix}, \quad (6.15)$$

$$\underline{\underline{C}} = 0.95 \begin{bmatrix} 365 & 0 \\ 0 & 365 \end{bmatrix} + 0.0023 \begin{bmatrix} 150000 & -60000 \\ -60000 & 150000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 691.75 & -138 \\ -138 & 691.75 \end{bmatrix} \quad (6.16a)$$

Verificación de la ortogonalidad de la matriz de amortiguamiento generalizada:

$$\underline{\underline{C}}^* = \underline{\underline{\Phi}}^T \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{\Phi}} = \begin{bmatrix} 0.0371 & 0.0371 \\ 0.0371 & -0.0371 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 691.75 & -138 \\ -138 & 691.75 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.0371 & 0.0371 \\ 0.0371 & -0.0371 \end{bmatrix} \quad (6.16b)$$

$$\underline{\underline{C}}^* = \underline{\underline{\Phi}}^T \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{\Phi}} = \begin{bmatrix} 0.0371 & 0.0371 \\ 0.0371 & -0.0371 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 20.54 & -30.784 \\ -20.544 & -30.784 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.524 & 0 \\ 0 & 2.284 \end{bmatrix} \quad (6.16c)$$

Calculo de las masas equivalentes para cada modo y estimación del Corte basal:

$$M_1^E = \frac{L_1^2}{M_1^*} = \frac{\left[(0.0371 \ 0.0371) \cdot \begin{bmatrix} 365 & 0 \\ 0 & 365 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right]^2}{1} = 733.5, \quad (6.17)$$

$$M_2^E = \frac{L_2^2}{M_2^*} = \frac{\left[(0.0371 \ -0.0371) \cdot \begin{bmatrix} 365 & 0 \\ 0 & 365 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right]^2}{1} = 0, \quad (6.18)$$

$$M_1^E + M_2^E = M_1 + M_2 \Rightarrow 733.5 \cong 365 + 365, \quad (6.19)$$

$$Q_b = 733.5 \times 9.8 + 0 \times 9.8 = 7188.3 \text{ kN}, \quad (6.20)$$

6.2.2 Respuesta espectral CQC en marco de dos pisos

Un Edificio de dos pisos se modela como un sistema de dos grados de libertad, ver Figura 6.4. A nivel de cada uno de los pisos existe un diafragma horizontal rígido y las deformaciones axiales en las columnas son despreciables. Considerando que el valor de la masa es igual a $m = 5000 \text{ kg} = 5 \text{ T}$ y la rigidez horizontal de la columnas es

constante de valor $K = 8000 \frac{kN}{m}$.

Se pide:

1. Determinar las frecuencias naturales ω_1 , ω_2 y la respectiva matriz modal normal.
2. Considerando el espectro de aceleraciones definido en la Figura 6.5, se pide

determinar los desplazamientos máximos a nivel de cada piso $D_1^{\max}$ y $D_2^{\max}$ utilizando el criterio de superposición modal CQC.

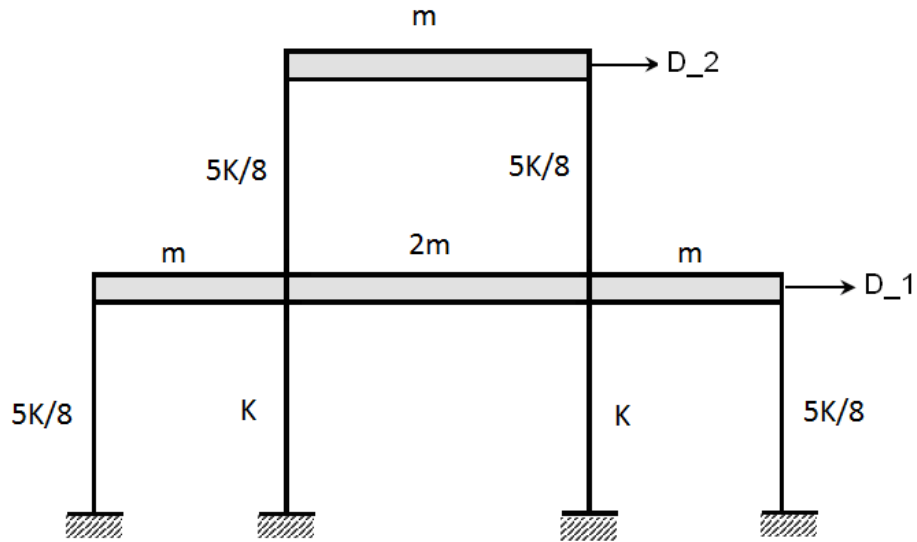


Figura 6.4: Elevación marco resistente.

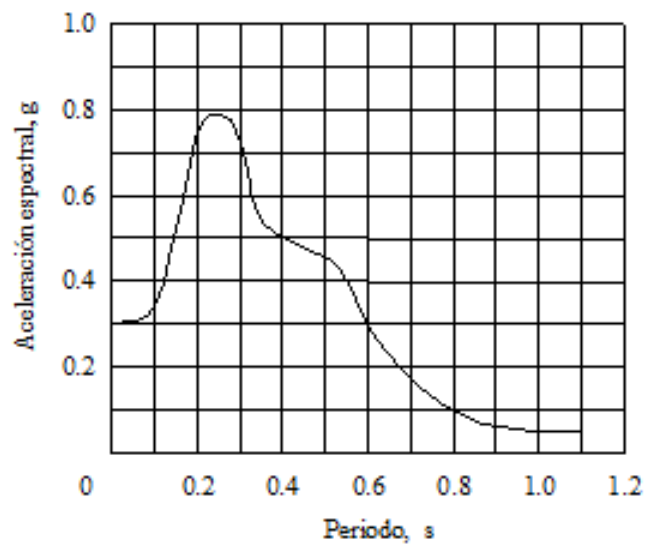


Figura 6.5: Espectro elástico de aceleraciones para $\xi = 5\%$ (ordenadas en $\frac{S_a}{g}$).

La matriz de rigidez horizontal y de masas concentradas, se pueden calcular y sus valores son:

$$\underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix} 4.5k & -1.25k \\ -1.25k & 1.25k \end{bmatrix} \frac{kN}{m} = \begin{bmatrix} 36000 & -10000 \\ -10000 & 10000 \end{bmatrix} \frac{kN}{m} \quad (6.21)$$

$$\underline{\underline{M}} = \begin{bmatrix} 4m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \quad T = \begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} T \quad (6.22)$$

Las respectivas frecuencias (auto-valores), se estiman resolviendo el sistema característico:

$$\det[\underline{\underline{K}} - \omega^2 \underline{\underline{M}}] = 0 \Rightarrow \omega^4 - 3800 \cdot \omega^2 + 2600000 = 0 \Rightarrow \quad (6.23)$$

$$\omega_1 = 29.92 \text{ y } \omega_2 = 53.90 \frac{rad}{s}$$

Lo cual permite obtener la matriz modal sin normalizar:

$$\underline{\underline{\Phi}} = \begin{bmatrix} 1 & -0.45 \\ 1.81 & 1.0 \end{bmatrix}, \quad (6.24)$$

El factor de normalización y la respectiva matriz modal normalizada, se obtienen como:

$$\underline{\underline{\Phi}}^T \cdot \underline{\underline{M}} \cdot \underline{\underline{\Phi}} = \begin{bmatrix} 1 & 1.81 \\ -0.45 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -0.45 \\ 1.81 & 1.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36.3 & 0 \\ 0 & 9.05 \end{bmatrix}, \quad (6.25)$$

$$\underline{\underline{\Phi}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{36.3}} & -\frac{0.45}{\sqrt{9.05}} \\ \frac{1.81}{\sqrt{36.3}} & \frac{1}{\sqrt{9.05}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.166 & -0.150 \\ 0.300 & 0.322 \end{bmatrix}, \quad (6.26)$$

En resumen se tiene que:

Modos	1	2
Frecuencia angular $\frac{rad}{s}$	29.92	53.90
Periodo S	0.21	0.12
1 ^{er} piso	0.166	-0.150
2 ^{do} piso	0.300	0.322

Tabla 6.2.: Propiedades dinámicas de la estructura.

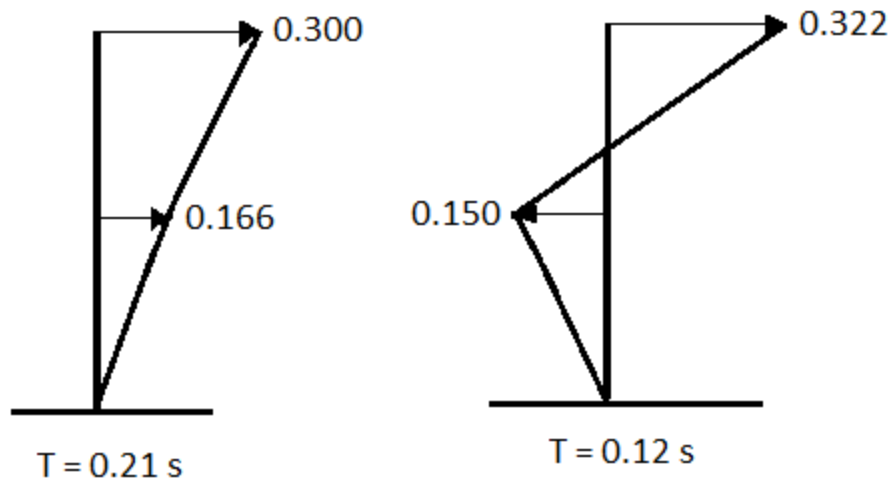


Figura 6.6: Representación de los modos de vibrar para la estructura. Espectro

Factores de participación modal:

$$\underline{\Gamma} = \frac{\begin{bmatrix} 0.166 & 0.300 \\ -0.150 & 0.332 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.82 \\ -1.34 \end{bmatrix}, \quad (6.27)$$

Factores de acoplamiento modal:

$$\rho_{11} = \rho_{22} = \frac{8\xi^2(1+1)1^{\frac{3}{2}}}{(1-1^2)^2 + 4\xi^2 1(1+1)^2} = 1 \quad \text{con } r = \frac{\omega_1}{\omega_1} = \frac{\omega_2}{\omega_2} = 1 \quad (6.28)$$

$$\rho_{12} = \rho_{21} = \frac{8\xi^2(1+0.555)0.555^{\frac{3}{2}}}{(1-0.555^2)^2 + 4\xi^2 0.555(1+0.555)^2} = 0.026; \quad (6.30)$$

$$r_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = 0.555$$

Modo	1	2
1	1	0.026
2	0.026	1

Tabla 6.3: Matriz de correlación de factores de acoplamiento

Los desplazamientos modales máximos, se obtienen a partir del espectro de aceleraciones de Figura 6.5:

$$\begin{bmatrix} z_1^{\max} \\ z_2^{\max} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma_1 \times S_{d_1} \\ \Gamma_2 \times S_{d_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma_1 \times \frac{S_{a_1}}{\omega_1^2} \\ \Gamma_2 \times \frac{S_{a_2}}{\omega_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.82 \times \frac{(0.75 \times 9.8)}{29.92^2} \\ -1.34 \times \frac{(0.33 \times 9.8)}{53.90^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +0.0396 \\ -0.0015 \end{bmatrix} m \quad (6.31)$$

Luego los desplazamientos por piso:

$$\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{11} \\ \Phi_{21} \end{bmatrix} z_1^{\max} + \begin{bmatrix} \Phi_{12} \\ \Phi_{22} \end{bmatrix} z_2^{\max}, \quad (6.32)$$

$$\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.166 \\ 0.300 \end{bmatrix} \times 0.0396 + \begin{bmatrix} -0.150 \\ 0.332 \end{bmatrix} \times -0.0015 = \quad (6.33)$$

$$\begin{bmatrix} \underbrace{(0.166 \times 0.0396)}_{z_{11}} + \underbrace{(0.150 \times 0.0015)}_{z_{12}} \\ \underbrace{(0.300 \times 0.0396)}_{z_{21}} + \underbrace{(-0.332 \times 0.0015)}_{z_{22}} \end{bmatrix}$$

Utilizando el criterio de superposición CQC, los desplazamientos en cada uno de los pisos serán:

$$D_1^{\max} = \sqrt{(z_{11}\rho_{11}z_{11} + z_{11}\rho_{12}z_{12} + z_{12}\rho_{21}z_{11} + z_{12}\rho_{22}z_{12})} = \sqrt{4.33 \times 10^{-5}} = 6.58 \times 10^{-3} \text{ m} \quad (6.34)$$

$$D_2^{\max} = \sqrt{(z_{21}\rho_{11}z_{21} + z_{21}\rho_{12}z_{22} + z_{22}\rho_{21}z_{21} + z_{22}\rho_{22}z_{22})} = \sqrt{1.42 \times 10^{-4}} = 0.012 \text{ m}$$

6.2.3 Respuesta analítica en marco de dos pisos

La estructura de la Figura 6.7, está sometida a una aceleración basal $\ddot{u}_s(t)$. Si la altura de entrepiso es constante de valor H y la rigidez flexional de las columnas es de $2EI$, se pide definir los desplazamientos asociados a cada uno de los grados de libertad:

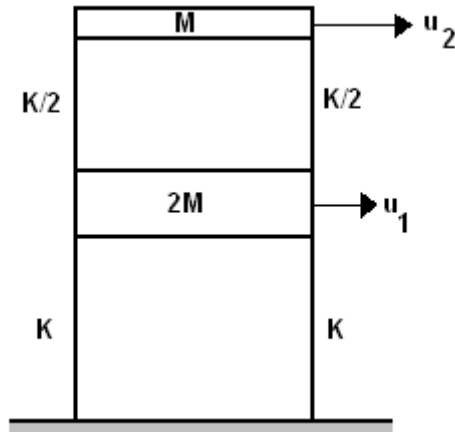


Figura 6.7 Estructura plana de dos niveles

Las respectivas matrices de rigidez lateral y de masa concentrada se estiman de acuerdo con:

$$\underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix} 3k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \underline{\underline{M}} = \begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \quad (6.35)$$

El problema característico que permite evaluar las respectivas frecuencias y modos de vibrar (propiedades dinámicas de la estructura):

$$\det[\underline{\underline{K}} - \omega^2 \underline{\underline{M}}] = 0 \Rightarrow \omega^4 - \frac{5k}{2m} \cdot \omega^2 + \left(\frac{k}{m}\right)^2 = 0 \Rightarrow \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{2m}} \text{ y } \omega_2 = \sqrt{\frac{2k}{m}} \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad (6.36)$$

$$\text{Si } k = 12 \cdot \frac{(2EI)}{H^3} \Rightarrow \omega_1 = 3.464 \sqrt{\frac{EI}{mH^3}} \text{ y } \omega_2 = 6.928 \sqrt{\frac{EI}{mH^3}} \quad (6.37)$$

La matriz modal sin normalizar:

$$\underline{\underline{\Phi}} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (6.38)$$

Normalizando con respecto a la raíz cuadrada de la masa generalizada asociada a cada modo, se tiene:

$$m_1 = \underline{\Phi}_1^T \cdot \underline{\underline{M}} \cdot \underline{\Phi}_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{3}{2} \cdot m \Rightarrow \quad (6.38)$$

$$\underline{\Phi}_1 = \frac{1}{\sqrt{m_1}} \cdot \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6m}} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$m_2 = \underline{\Phi}_2^T \cdot \underline{\underline{M}} \cdot \underline{\Phi}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \cdot m \Rightarrow \quad (6.39)$$

$$\underline{\Phi}_2 = \frac{1}{\sqrt{m_2}} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3m}} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dado que la matriz modal se normalizo, se cumple que:

$$\underline{\underline{M}}^* = \underline{\Phi}^T \cdot \underline{\underline{M}} \cdot \underline{\Phi} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6m}} & \frac{2}{\sqrt{6m}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3m}} & \frac{1}{\sqrt{3m}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \cdot m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6m}} & -\frac{1}{\sqrt{3m}} \\ \frac{2}{\sqrt{6m}} & \frac{1}{\sqrt{3m}} \end{bmatrix}, \quad (6.40)$$

$$= \begin{bmatrix} M_1^* & 0 \\ 0 & M_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Los respectivos factores de participación modal:

$$\Gamma_1 = \frac{L_1}{M_1^*} = \frac{\underline{\Phi}_1^T \cdot \underline{\underline{M}} \cdot \underline{1}}{M_1^*} = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{6m}, \quad (6.41)$$

$$\Gamma_2 = \frac{L_2}{M_2^*} = \frac{\underline{\Phi}_2^T \cdot \underline{\underline{M}} \cdot \underline{1}}{M_2^*} = \sqrt{3m}, \quad (6.42)$$

Luego las respectivas ecuaciones desacopladas de movimiento del sistema, se presentan como:

$$\ddot{z}_1 + \left[3.464 \sqrt{\frac{EI}{mH^3}} \right]^2 \cdot z_1 = -\frac{2}{3} \cdot \sqrt{6m} \cdot \ddot{u}_s(t), \quad (6.43)$$

$$\ddot{z}_2 + \left[6.928 \sqrt{\frac{EI}{mH^3}} \right]^2 \cdot z_2 = -\sqrt{3m} \cdot \ddot{u}_s(t), \quad (6.44)$$

Conocidas las respuestas $z_1(t)$ y $z_2(t)$ (a partir de las ecuaciones desarrolladas en el capítulo 2, del presente texto) en función de la aceleración del suelo $\ddot{u}_s(t)$ y las condiciones iniciales del movimiento, los desplazamientos reales $u_1(t)$ y $u_2(t)$ se estiman por:

$$\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6m}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot z_1(t) + \sqrt{3m} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot z_2(t), \quad (6.45)$$

6.2.4 Verificación de propiedades de ortogonalidad de los modos de vibrar

Un sistema lineal puede idealizarse como un sistema de tres grados de libertad tiene la matriz de masa que se indica. Se han calculado dos de las formas modales y los valores de las tres frecuencias que son:

$$\underline{\Phi}_1 = [0.25 \ 0.50 \ 1.00]^T, \quad \underline{\Phi}_2 = [0.25 \ 0.50 \ -0.1125]^T,$$

$$\omega_1 = 2.51 \frac{rad}{s}, \quad \omega_2 = 4.17 \frac{rad}{s}, \quad \omega_3 = 12.57 \frac{rad}{s}.$$

¿Cuál es la tercera forma modal?

$$\underline{\underline{M}} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 50 \end{bmatrix}, \quad (6.46)$$

$$1. \quad \underline{\Phi}_3 = [1.00 \ 0.50 \ 0.25]^T \quad (6.46)$$

$$2. \quad \underline{\Phi}_3 = [1.00 \ -0.50 \ 0.50]^T$$

$$3. \quad \underline{\Phi}_3 = [0 \ 0.50 \ 0.50]^T$$

$$4. \quad \underline{\Phi}_3 = [1.00 \ -0.25 \ 0]^T$$

Puesto que la matriz de masa es ortogonal con respecto a dos auto-vectores $i \neq j$, se tiene:

$$\underline{\Phi}_1^T \cdot \underline{\underline{M}} \cdot \underline{\Phi}_3 = 0 \Rightarrow 2.5 \cdot \Phi_{13} + 10 \cdot \Phi_{23} + 50 \cdot \Phi_{33} = 0 \quad (6.47)$$

$$\underline{\Phi}_2^T \cdot \underline{\underline{M}} \cdot \underline{\Phi}_3 = 0 \Rightarrow 2.5 \cdot \Phi_{13} + 10 \cdot \Phi_{23} + 5.625 \cdot \Phi_{33} = 0$$

Considerando la opción 4 $\underline{\Phi}_3 = [1.00 \ -0.25 \ 0]^T$

$$\underline{\Phi}_1^T \cdot \underline{\underline{M}} \cdot \underline{\Phi}_3 = 0 \Rightarrow 2.5 \cdot 1 + 10 \cdot -0.25 + 50 \cdot 0 = 0 \quad (6.48)$$

$$\underline{\Phi}_2^T \cdot \underline{\underline{M}} \cdot \underline{\Phi}_3 = 0 \Rightarrow 2.5 \cdot 1 + 10 \cdot -0.25 + 5.625 \cdot 0 = 0$$

6.2.5 Respuesta analítica en marco de dos pisos

Para la estructura de dos pisos de la Figura 6.8, considerando que en cada nivel existe un diafragma horizontal rígido y que las deformaciones axiales en las columnas son despreciable, se pide:

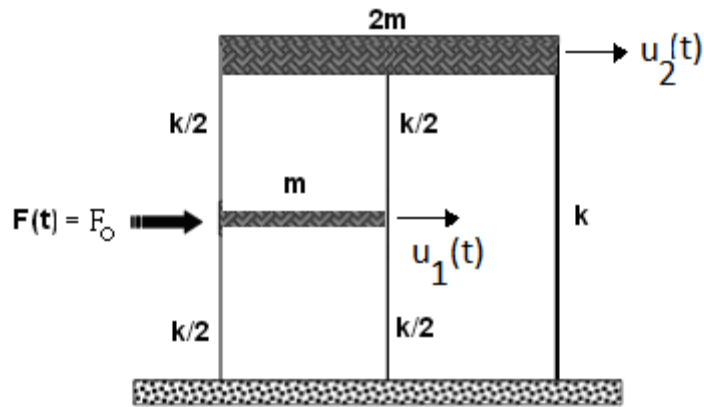


Figura 6.8: Edificio de dos grados de libertad.

1. Escribir las ecuaciones de equilibrio dinámico, cuando la carga $F(t) = F_0$ actúa sobre la estructura (no considere las fuerzas de amortiguamiento viscoso).
2. Estimar las frecuencias del sistema.
3. Dibujar las respectivas formas modales.
4. Si la carga $F(t)$ se aplica en forma cuasi-estática (es decir, se aplica en forma incremental desde cero hasta su valor final F_0 en forma muy lenta) de modo que el desplazamiento lateral de la losa ubicada en ese nivel alcanza un valor unitario, estime el desplazamiento que se desarrolla a nivel del piso superior de masa $2m$.
5. Si la estructura se libera libremente después de alcanzado los desplazamientos horizontales asociados a la pregunta anterior, se pide estimar la forma analítica de la respuesta en vibración libre no amortiguada de cada uno de los pisos, considerando que las velocidades iniciales asociadas a cada grado de libertad son nulas.

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 2m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.49)$$

Ecuación característica y frecuencias:

$$\det[\underline{\underline{K}} - \omega^2 \underline{\underline{M}}] = 0 \Rightarrow \omega^4 - 3 \frac{k}{m} \cdot \omega^2 + \frac{3}{2} \left[\frac{k}{m} \right]^2 = 0 \Rightarrow \quad (6.50)$$

$$\omega_1 = 0.79 \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ y } \omega_2 = 1.54 \sqrt{\frac{k}{m}} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Calculando la matriz modal sin normalizar, se obtiene:

$$\underline{\underline{\Phi}} = \begin{bmatrix} 1.00 & -2.70 \\ 1.37 & 1.00 \end{bmatrix}, \quad (6.51)$$

Modos	1	2
Frecuencia angular $\frac{\text{rad}}{\text{s}}$	$0.79 \sqrt{\frac{k}{m}}$	$1.54 \sqrt{\frac{k}{m}}$
1 ^{er} piso	1.00	-2.70
2 ^{do} piso	1.37	1.00

Tabla 6.4.: Propiedades dinámicas de la estructura.

Formas modales:

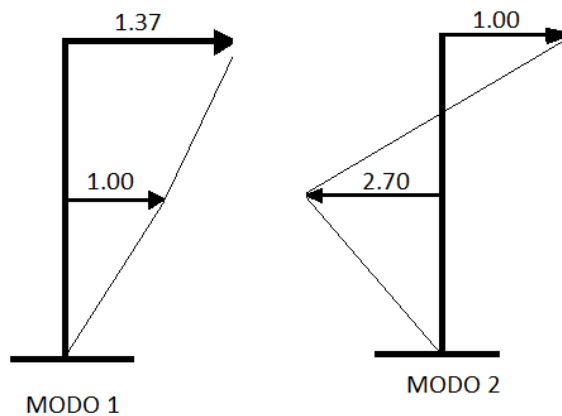


Figura 6.9: Formas modales, sin normalizar.

Si la carga se aplica lentamente, el problema es cuasi estático, lo cual se traduce que las aceleraciones en los respectivos diafragmas son nulas: $\ddot{u}_1 = \ddot{u}_2 = 0$, y la ecuación de equilibrio se reduce a:

$$\begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ u_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow u_{20} = 0.5 \quad (6.52)$$

Y dado que las condiciones iniciales de velocidad son nulas, se tiene que:

$$\begin{bmatrix} 1.00 & -2.70 \\ 1.37 & 1.0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_{10} \\ z_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{10} \\ u_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} z_{10} \\ z_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.500 \\ -0.185 \end{bmatrix} \quad (6.53)$$

$$\begin{bmatrix} 1.00 & -2.70 \\ 1.37 & 1.0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{z}_{10} \\ \dot{z}_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{u}_{10} \\ \dot{u}_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{z}_{10} \\ \dot{z}_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \end{bmatrix} \quad (6.54)$$

La respuesta en vibración libre en las respectivas coordenadas modales, para cada grado de libertad es dada por:

$$z_1(t) = 0.5 \cdot \cos\left(0.79\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \quad (6.55)$$

$$z_2(t) = -0.185 \cdot \cos\left(1.54\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

Finalmente la respuesta en vibración libre en coordenadas reales, se estima por:

$$\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.00 & -2.70 \\ 1.37 & 1.00 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.5 \cdot \cos\left(0.79\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \\ -0.185 \cdot \cos\left(1.54\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \end{bmatrix} \quad (6.56)$$

6.2.6 Respuesta espectral CQC en marco de tres pisos

La estructura de tres pisos de la Figura 6.10, tiene una rigidez de piso uniformemente distribuida de magnitud igual a $K_1 = K_2 = K_3 = 16357,5 \frac{kN}{m}$ y una masa concentrada a nivel de piso de $m_1 = m_2 = 10 T$ y $m_3 = 5 T$.

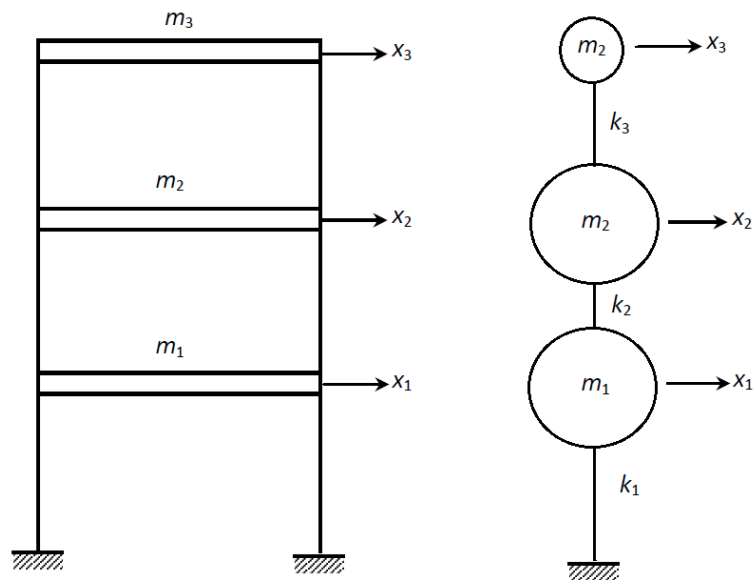


Figura 6.10: Edificio de tres niveles.

Si la matriz modal normal, se conoce y viene especificada por:

$$\underline{\underline{\Phi}} = \begin{bmatrix} 0.1291 & 0.2582 & -0.1291 \\ 0.2226 & 0.000 & 0.2236 \\ 0.2582 & -0.2582 & -0.2582 \end{bmatrix} \quad (6.57)$$

1. A partir de las propiedades de esta matriz modal normal se pide definir las respectivas ecuaciones desacoplas de movimiento (no considere el amortiguamiento estructural) para una excitación del tipo sísmico.

2. A partir de la pregunta anterior, indique el valor de las tres frecuencias naturales del sistema ω_1 , ω_2 y ω_3 .
3. Considerando el espectro de aceleraciones definido en la Figura 6.5, se pide determinar los desplazamientos máximos a nivel de cada piso utilizando el criterio de superposición modal CQC, especificando cuantos modos contribuyen en la respuesta de acuerdo al criterio utilizado por la NCh433-Of96-Mod-2012.

Planteamiento de las ecuaciones de equilibrio dinámico (considerando que $K_1 = K_2 = K_3 = 16357,5 \frac{kN}{m}$):

$$\begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{bmatrix} + 16357,5 \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u_s(t) \quad (6.58)$$

Puesto que la matriz modal (6.57) se encuentra normalizada, se cumple que:

$$\underline{\underline{\Phi}}^T \cdot \underline{\underline{K}} \cdot \underline{\underline{\Phi}} = \underline{\underline{\Omega}}^2 = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (29.9)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (57.2)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (78.1)^2 \end{bmatrix} \quad (6.59)$$

Calculando el lado derecho de la ecuación de movimiento (6.58) y la respectiva matriz de masa generalizada:

$$\underline{L} = \underline{\underline{\Phi}}^T \cdot \underline{\underline{M}} \cdot \underline{1} \Rightarrow L_j = \underline{\Phi}_j^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{1} \quad (6.60)$$

$$\underline{\underline{L}} = \begin{bmatrix} 0.1291 & 0.2226 & 0.2582 \\ 0.2582 & 0.000 & -0.2582 \\ -0.1291 & 0.2236 & -0.2582 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +4.808 \\ +1.291 \\ -0.348 \end{bmatrix}$$

Se obtienen las ecuaciones de movimiento desacopladas:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{z}_1 \\ \ddot{z}_2 \\ \ddot{z}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (29.9)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (57.2)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (78.1)^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +4.808 \\ +1.291 \\ -0.348 \end{bmatrix} u_s(t) \quad (6.61)$$

A partir del espectro de aceleraciones (Figura 6.5), para cada uno de los periodos se tiene:

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = 0.30 \text{ (s)} \Rightarrow \quad (6.62)$$

$$S_{a_1} = 0.70 \times 9.8 = 6.86 \frac{m}{s^2} \Rightarrow S_{d_1} = \frac{6.86}{(20.9)^2} = 15.7 \times 10^{-3}$$

$$T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = 0.11 \text{ (s)} \Rightarrow$$

$$S_{a_2} = 0.35 \times 9.8 = 3.43 \frac{m}{s^2} \Rightarrow S_{d_2} = \frac{3.43}{(57.2)^2} = 1.05 \times 10^{-3}$$

$$T_3 = \frac{2\pi}{\omega_3} = 0.08 \text{ (s)} \Rightarrow$$

$$S_{a_3} = 0.32 \times 9.8 = 3.10 \frac{m}{s^2} \Rightarrow S_{d_3} = \frac{3.10}{(78.1)^2} = 5.08 \times 10^{-4}$$

$$z_1^{\max} = 4.808 \times (15.7 \times 10^{-3}) = 0.0755 \text{ m} \quad (6.63)$$

$$z_2^{\max} = 1.291 \times (1.05 \times 10^{-3}) = 1.36 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$z_2^{\max} = -0.3481 \times (5.08 \times 10^{-4}) = -1.80 \times 10^{-4} \text{ m}$$

Desplazamientos reales:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^3 \underline{\Phi}_j z_j^{\max} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0.1291 \\ 0.2226 \\ 0.2582 \end{bmatrix}}_{\text{MODO 1}} \cdot 0.0755 + \underbrace{\begin{bmatrix} 0.2582 \\ 0.000 \\ -0.2582 \end{bmatrix}}_{\text{MODO 2}} \cdot 0.00136 + \dots \quad (6.64)$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \underbrace{9.75 \times 10^{-3}}_{Z_{11}} \\ \underbrace{0.0168}_{Z_{21}} \\ \underbrace{0.0195}_{Z_{31}} \end{bmatrix}}_{\text{MODO 1}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \underbrace{3.51 \times 10^{-4}}_{Z_{21}} \\ \underbrace{0.000}_{Z_{22}} \\ \underbrace{-3.51 \times 10^{-4}}_{Z_{32}} \end{bmatrix}}_{\text{MODO 2}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \underbrace{2.32 \times 10^{-5}}_{Z_{31}} \\ \underbrace{-4.03 \times 10^{-5}}_{Z_{23}} \\ \underbrace{4.65 \times 10^{-5}}_{Z_{33}} \end{bmatrix}}_{\text{MODO 3}}$$

Masas equivalentes para cada modo:

$$M_1^E = \frac{L_1^2}{M_1^*} = \frac{(4.808)^2}{1} = 23.11 \quad (6.65)$$

$$M_2^E = \frac{L_2^2}{M_2^*} = \frac{(1.291)^2}{1} = 1.67$$

$$M_3^E = \frac{L_3^2}{M_3^*} = \frac{(-0.348)^2}{1} = 0.12$$

$$\sum M_j^E = 23.11 + 1.67 + 0.12 = 24.9 \quad (6.66)$$

Considerando que el primer modo tiene una masa equivalente del orden del 92.4 % de la masa total, bastaría con considerar únicamente la contribución este modo en la respuesta pues involucra una masa equivalente mayor al 90.0 % de la masa total.

$$\begin{bmatrix} x_1^{\max} \\ x_2^{\max} \\ x_3^{\max} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{(9.75 \times 10^{-3}) \times 1 \times (9.75 \times 10^{-3}) + \dots} = 9.75 \times 10^{-3} \\ \sqrt{(0.0168) \times 1 \times (0.0168) + \dots} = 0.0168 \\ \sqrt{(0.0195) \times 1 \times (0.0195) + \dots} = 0.0195 \end{bmatrix} m \quad (6.67)$$

6.2.7 Cálculo de matriz de amortiguamiento tipo Rayleigh

La estructura de la Figura 6.11 consiste en un marco de dos pisos con sus respectivos diafragmas rígidos (columnas con $EA \rightarrow \infty$ y losas con $EI \rightarrow \infty$ en su plano) el cual debe ser diseñado para resistir cargas sísmicas de acuerdo al espectro de diseño definido en la Figura 6.12 (el cual considera un amortiguamiento del 5%). Considere que la masa concentrada a nivel de cada uno de los diafragmas horizontales es de $M = 6 \text{ T}$, se pide:

1. Determinar el valor de la rigidez horizontal $K \frac{kN}{m}$ para que el periodo fundamental de la estructura no exceda los 0.2 s.
2. Construya la Matriz Modal $\underline{\Phi}$ (sin normalizar), estime los factores de participación modal y calcule las masas equivalentes.
3. Determinar los desplazamientos máximos a nivel de cada piso utilizando el criterio de superposición modal CQC y el valor del corte basal.
4. Construya la matriz de Amortiguamiento proporcional del tipo Rayleigh considerando que ambos modos tienen un amortiguamiento del 5%.

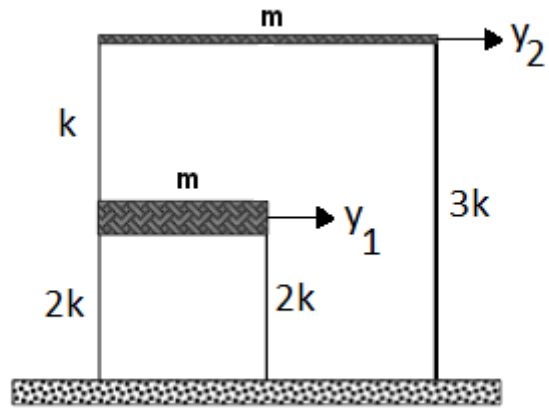


Figura 6.11: Marco Plano con diafragmas horizontales rígidos.

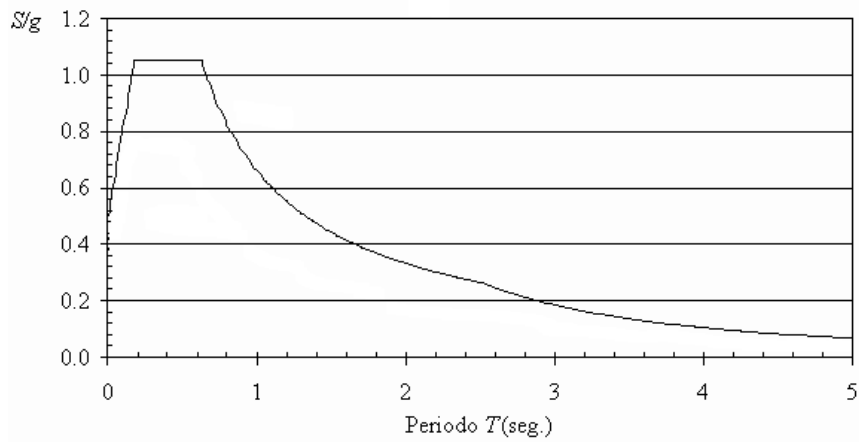


Figura 6.12: Espectro de Diseño asociado a un amortiguamiento del 5% del crítico.

Las respectivas matrices de rigidez lateral y de masa concentrada se estiman de acuerdo con:

$$\underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix} 5k & -k \\ -k & 4k \end{bmatrix} \frac{kN}{m} \quad y \quad \underline{\underline{M}} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} T \quad (6.68)$$

El problema característico que permite evaluar las respectivas frecuencias y modos de vibrar (propiedades dinámicas de la estructura):

$$\det[\underline{K} - \lambda \underline{M}] = 0 \Rightarrow 36 \cdot \lambda^2 - 54 \cdot k \cdot \lambda + 19 \cdot k^2 = 0 \Rightarrow \quad (6.69)$$

$$\lambda_1 = 0.564 \cdot k \text{ y } \lambda_2 = 0.936 \cdot k$$

Puesto que $\lambda = \omega^2$, se tiene:

$$\omega_1 = 0.751\sqrt{k} \quad (6.70)$$

$$\omega_2 = 0.967\sqrt{k}$$

$$T_1 \leq 0.2 \text{ s} \Rightarrow \frac{2\pi}{0.751\sqrt{k}} = 0.2 \Rightarrow k = 1749.93 \frac{kN}{m} \quad (6.71)$$

Conocida la constante de rigidez, se pueden estimar ambas frecuencias (ecuación 6.70) y la matriz de rigidez (ecuación 6.68):

$$\omega_1 = 0.751\sqrt{k} = 31.42 \frac{rad}{s} \Rightarrow T_1 = 0.20 \text{ s} \quad (6.72)$$

$$\omega_2 = 0.967\sqrt{k} = 40.45 \frac{rad}{s} \Rightarrow T_2 = 0.16 \text{ s}$$

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} 8750.0 & -1750.0 \\ -1750.0 & 7000.0 \end{bmatrix} \frac{kN}{m} \quad (6.73)$$

Conocida la matriz de rigidez se procede a estimar los respectivos auto-vectores, la matriz modal, factores de participación modal y masa equivalente asociada a cada modo:

$$\underline{\Phi} = \begin{bmatrix} +1.000 & +1.000 \\ +1.618 & -0.618 \end{bmatrix}, \quad (6.74)$$

$$\Gamma_1 = \frac{L_1}{M_1^*} = \frac{15.71}{21.7} = 0.724 \quad (6.75)$$

$$\Gamma_2 = \frac{L_2}{M_2^*} = \frac{2.29}{8.29} = 0.276$$

$$M_1^E = \frac{L_1^2}{M_1^*} = \frac{(15.71)^2}{21.7} = 11.37 \quad (6.76)$$

$$M_2^E = \frac{L_2^2}{M_2^*} = \frac{(2.29)^2}{8.29} = 0.633$$

$$\sum M_j^E = 11.37 + 0.633 = 12.003 \cong m_1 + m_2 = 6 + 6 = 12 \quad T \Rightarrow OK \quad (6.77)$$

A efectos de utilizar el método CQC, se calculan los factores de acoplamiento:

$$\rho_{11} = \rho_{22} = \frac{8\xi^2(1+1)1^{\frac{3}{2}}}{(1-1^2)^2 + 4\xi^2 1(1+1)^2} = 1 \quad \text{con } r = \frac{\omega_1}{\omega_1} = \frac{\omega_2}{\omega_2} = 1 \quad (6.78)$$

$$\rho_{21} = \frac{8\xi^2(1+1.287)1.287^{\frac{3}{2}}}{(1-1.287^2)^2 + 4\xi^2 1.287(1+1.287)^2} = 0.134 ; \quad (6.79)$$

$$r_{21} = \frac{T_1}{T_2} = 1.287$$

$$\rho_{12} = \frac{8\xi^2(1+0.777)0.777^{\frac{3}{2}}}{(1-0.777^2)^2 + 4\xi^2 0.777(1+0.777)^2} = 0.134 ; \quad (6.80)$$

$$r_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{31.42}{40.45} = 0.777$$

Modo	1	2
1	1	0.134
2	0.134	1

Tabla 6.5: Matriz de correlación de factores de acoplamiento

De acuerdo a lo indicado por el espectro de aceleraciones de Figura 6.12, se pueden obtener para cada periodo las aceleraciones máximas y luego calcular los respectivos desplazamientos espectrales:

$$T_1 = 0.20 \text{ s} \Rightarrow S_{a_1} = 1.3 \times 9.8 = 12.74 \frac{m}{s^2} \Rightarrow \quad (6.81)$$

$$S_{d_1} = \frac{12.74}{(31.42)^2} = 0.0129 \text{ m}$$

$$T_2 = 0.16 \text{ s} \Rightarrow S_{a_2} = 0.95 \times 9.8 = 9.31 \frac{m}{s^2} \Rightarrow$$

$$S_{d_2} = \frac{9.31}{(40.45)^2} = 5.69 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$z_1^{\max} = \Gamma_1 \times S_{d_1} = 9.34 \times 10^{-3} \text{ m} \quad (6.82)$$

$$z_2^{\max} = \Gamma_2 \times S_{d_2} = 1.57 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.000 \\ 1.618 \end{bmatrix} z_1^{\max} + \begin{bmatrix} +1.000 \\ -0.618 \end{bmatrix} z_2^{\max} = \begin{bmatrix} \underbrace{1.000 \times z_1^{\max}}_{Z_{11}=9.34 \times 10^{-3}} + \underbrace{1.000 \times z_2^{\max}}_{Z_{12}=1.57 \times 10^{-3}} \\ \underbrace{1.618 \times z_1^{\max}}_{Z_{21}=15.11 \times 10^{-3}} + \underbrace{-0.618 \times z_2^{\max}}_{Z_{22}=-0.97 \times 10^{-3}} \end{bmatrix} \quad (6.83)$$

Desplazamientos máximos por piso CQC:

$$y_1^{\max} = \left[(9.34)^2 + (9.34 \times 0.134 \times 1.57) \times 2 + (1.57)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \times 10^{-3} \quad (6.84)$$

$$= 9.68 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$y_2^{\max} = \left[(15.11)^2 + (15.11 \times 0.134 \times -0.97) \times 2 + (-0.97)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \times 10^{-3} \quad (6.85)$$

$$= 15.04 \times 10^{-3} \text{ m}$$

Corte basal:

$$Q_b = 11.37 \times 12.74 + 0.633 \times 9.31 = 150.7 \text{ kN} \quad (6.86)$$

La matriz de amortiguamiento del tipo Rayleigh, se estima por:

$$\underline{\underline{C}} = \alpha \underline{\underline{M}} + \beta \underline{\underline{K}} \quad (6.87)$$

$$\alpha = 0.05 \frac{2 \times 31.42 \times 40.51}{(31.42 + 40.51)} = 1.77 \quad (6.88)$$

$$\beta = 0.05 \frac{2}{(31.42 + 40.51)} = 1.39 \times 10^{-3}$$

$$\underline{\underline{C}} = \begin{bmatrix} 22.81 & -2.44 \\ -2.44 & 20.38 \end{bmatrix} \quad (6.89)$$

6.2.8 Respuesta espectral de acuerdo a NCh433

La estructura de la Figura 6.13, corresponde a un edificio habitacional de tres pisos de hormigón armado, estructurado en base a marcos rígidos con columnas de $50 \times 50 \text{ cm}^2$ y losa, ubicado en Concepción, en un suelo tipo D. Determine utilizando análisis modal espectral y la NCh433.Of96-Mod2012, el esfuerzo de corte basal de

diseño, desplazamientos por piso y verifique si cumple con los límites de la norma.

Considere que el hormigón tiene una resistencia característica de $f'_c = 25 \text{ MPa}$.

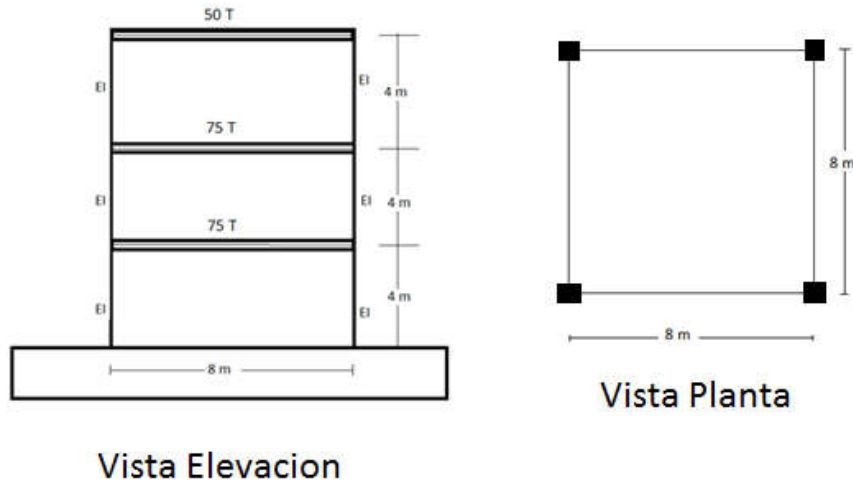


Figura 6.13: Estructura en base a marcos rígidos de hormigón armado.

Inercia de las columnas:

$$I = \frac{1}{12} (0.5)(0.5)^3 = 5.21 \times 10^{-3} \text{ m}^4 \quad (6.90)$$

$$E_c = 4700 \sqrt{25} = 23500,00 \text{ MPa} = 2.35 \times 10^7 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} \quad (6.91)$$

Rigidez equivalente de piso:

$$K_1 = K_2 = K_3 = 4 \times 12 \frac{(E_c I)}{4^3} = 91826 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \quad (6.92)$$

Matriz de rigidez horizontal:

$$\underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix} K_1 + K_2 & -K_2 & 0 \\ -K_2 & K_2 + K_3 & -K_3 \\ 0 & -K_3 & K_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 183652 & -91826 & 0 \\ -91826 & 183652 & -91826 \\ 0 & -91826 & 91826 \end{bmatrix} \frac{kN}{m} \quad (6.93)$$

Matriz de masa:

$$\underline{\underline{M}} = \begin{bmatrix} 75 & 0 & 0 \\ 0 & 75 & 0 \\ 0 & 0 & 50 \end{bmatrix} T \quad (6.94)$$

Matriz modal normalizada:

$$\underline{\underline{\Phi}} = \begin{bmatrix} 1.0000 & 1.0000 & 1.000 \\ 1.7594 & 0.1953 & -1.4548 \\ 2.0955 & -0.9618 & 1.1163 \end{bmatrix} \quad (6.95)$$

$$\omega_1 = 17.16 \frac{rad}{s} \Rightarrow T_1 = 0.366 (s); \quad (6.96)$$

$$\omega_2 = 47.00 \frac{rad}{s} \Rightarrow T_2 = 0.134 (s);$$

$$\omega_3 = 65.04 \frac{rad}{s} \Rightarrow T_3 = 0.097 (s);$$

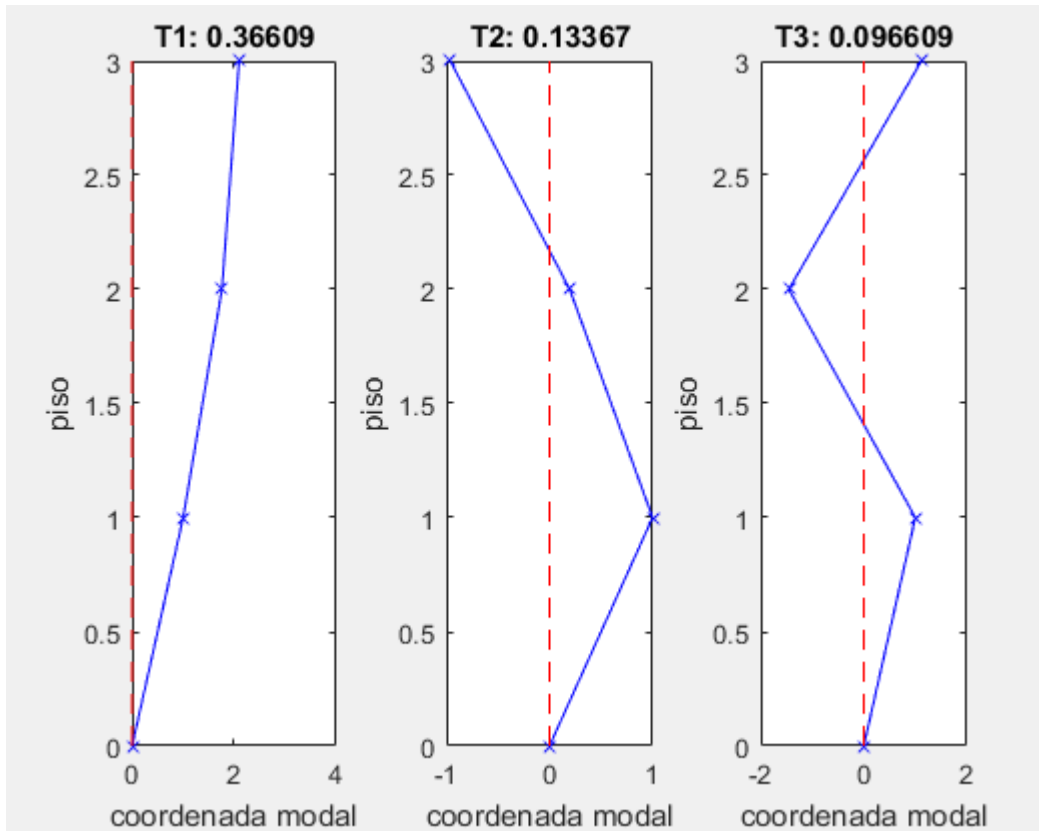


Figura 6.14: Formas modales y respectivos periodos de vibración.

El análisis modal espectral se realizara de acuerdo a norma NCh433, por consiguiente todas las ecuaciones y numerales se referirán a ella. Considerando que el espectro de diseño de pseudo-aceleraciones de la estructura, es dado por:

$$S_a = \frac{S \cdot A_0}{R^* / I} \alpha \quad (6.97)$$

En que los valores de I y A_0 se determinan en la forma estipulada en punto 6.2.3. El valor de S se determina de tabla 6.3, en función del tipo de suelo (desde A-F), y el factor

de amplificación α se determina para cada modo de vibrar, de acuerdo con la expresión 6.3.5.2.

Edificio de uso habitacional $\Rightarrow$ categoría II $\Rightarrow I = 1.0$ (Tabla 4.3)

Lugar de emplazamiento Concepción $\Rightarrow$ zona 3 $\Rightarrow A_0 = 0.40g$ (Tablas 4.1 y 6.2)

Sistema estructural en base a marcos rígidos de hormigón armado $\Rightarrow R_0 = 11$ (Tabla 5.1)

Suelo tipo D $\Rightarrow S = 1.2$, $T_0 = 0.75$ (s) y $p = 1.0$

Factor de reducción R^* :

$$R^* = 1 + \frac{T^*}{0.10 \cdot T_0 + \frac{T^*}{R_0}} = 1 + \frac{0.366}{0.10 \cdot 0.75 + \frac{0.366}{11}} = 4.38 \quad (6.98)$$

El respectivo espectro de diseño de pseudo aceleraciones, se presenta en la Figura 6.15 y se expresa analíticamente como:

$$S_a = \frac{1.2 \cdot (0.4 \times 9.8)}{\left[\frac{4.38}{1} \right]} \cdot \alpha = 1.074 \cdot \alpha = 1.074 \cdot \frac{1 + 4.5 \left[\frac{T}{0.75} \right]}{1 + \left[\frac{T}{0.75} \right]^3} \quad (6.99)$$

El factor de amplificación, para cada uno de los respectivos modos:

Modo 1 $\Rightarrow$

(6.100)

$$\alpha_1 = \frac{1 + 4.5 \left[\frac{0.366}{0.75} \right]^1}{1 + \left[\frac{0.366}{0.75} \right]^3} = \frac{3.196}{1.116} = 2.86$$

$$\Rightarrow S_{a_1} = 1.07 \times 2.86 = 3.06 \frac{m}{s^2}$$

Modo 2 $\Rightarrow$

$$\alpha_2 = \frac{1 + 4.5 \left[\frac{0.134}{0.75} \right]^1}{1 + \left[\frac{0.134}{0.75} \right]^3} = \frac{1.8040}{0.9943} = 1.81$$

$$\Rightarrow S_{a_2} = 1.07 \times 1.81 = 1.94 \frac{m}{s^2}$$

Modo 3 $\Rightarrow$

$$\alpha_2 = \frac{1 + 4.5 \left[\frac{0.097}{0.75} \right]^1}{1 + \left[\frac{0.097}{0.75} \right]^3} = \frac{1.582}{1.002} = 1.58$$

$$\Rightarrow S_{a_3} = 1.07 \times 1.58 = 1.69 \frac{m}{s^2}$$

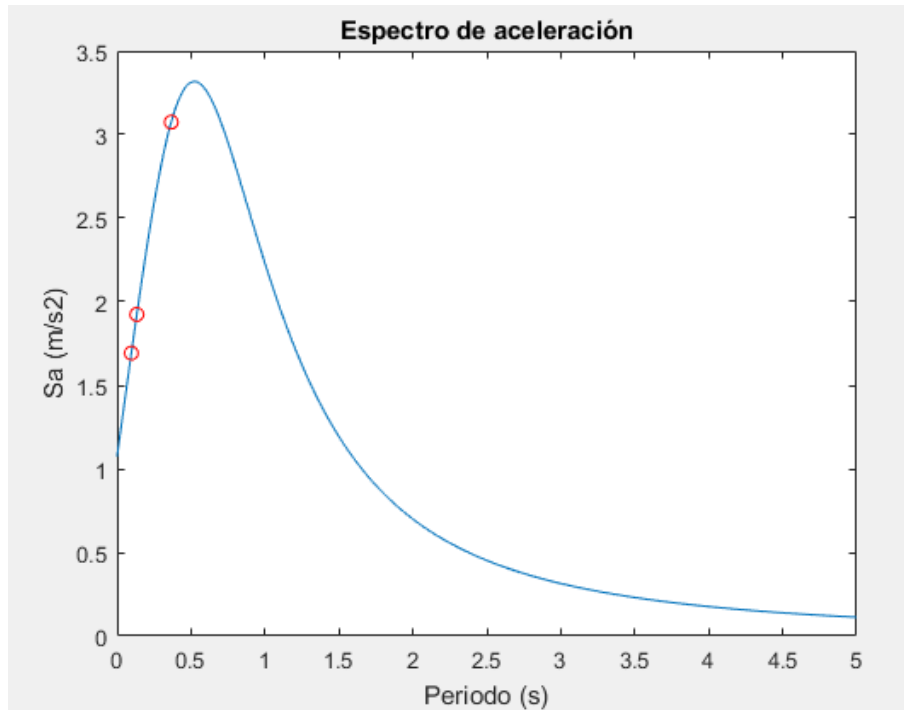


Figura 6.15: Espectro de Diseño NCh433.Of 1996 Mod. 2012, $\xi = 5 \%$ del crítico.

Los factores de acoplamiento modal, se presentan en Tabla 6.4:

Modo	1	2	3
1	1	7.94×10^{-3}	3.939×10^{-3}
2	7.94×10^{-3}	1	0.0861
3	3.939×10^{-3}	0.0861	1

Tabla 6.4: Matriz de correlación de factores de acoplamiento

Calculo de los factores de participación modal:

Modo 1 $\Rightarrow$

(6.102)

$$\Gamma_1 = \frac{\underline{\Phi}_1^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{1}}{\underline{\Phi}_1^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{\Phi}_1} = \frac{(1 \times 75 + 1.76 \times 75 + 50 \times 2.10)}{(75 \times 1^2 + 75 \times 1.76^2 + 50 \times 2.10^2)} = 0.591$$

Modo 2 $\Rightarrow$

$$\Gamma_2 = \frac{\underline{\Phi}_2^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{1}}{\underline{\Phi}_2^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{\Phi}_2} = \frac{(1 \times 75 + 0.195 \times 75 + 50 \times -0.962)}{(75 \times 1^2 + 75 \times 0.195^2 + 50 \times -0.962^2)} = 0.335$$

Modo 3 $\Rightarrow$

$$\Gamma_3 = \frac{\underline{\Phi}_3^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{1}}{\underline{\Phi}_3^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{\Phi}_3} = \frac{(75 \times 1 - 75 \times 1.455 + 50 \times 1.116)}{(75 \times 1^2 + 75 \times -1.455^2 + 50 \times 1.116^2)} = 0.0732$$

Masa modal efectiva:

$$M_1^E = \Gamma_1 \cdot L_1 = 0.591 \cdot (75 \times 1 + 75 \times 1.76 + 50 \times 2.10) = 1844 \quad (6.103)$$

$$M_2^E = \Gamma_2 \cdot L_2 = 0.335 \cdot (75 \times 1 + 75 \times 0.195 + 50 \times -0.962) = 13.9$$

$$M_3^E = \Gamma_3 \cdot L_3 = 0.0732 \cdot (75 \times 1 - 75 \times 1.455 + 50 \times 1.116) = 1.6$$

$$\sum_j M_j^E = 184.4 + 13.9 + 1.6 = 200.0$$

$$M_1^E = 184.4 > 90\% M_{Total}$$

Desplazamientos modales:

$$z_1^{\max} = \Gamma_1 \times S_D = 0.591 \times \frac{3.06}{17.16^2} = 6.14 \times 10^{-3} \text{ m} \quad (6.104)$$

$$z_2^{\max} = \Gamma_2 \times S_D = 0.335 \times \frac{1.94}{47.0^2} = 2.94 \times 10^{-4} \text{ m}$$

$$z_3^{\max} = \Gamma_3 \times S_D = 0.073 \times \frac{1.69}{65.04^2} = 2.92 \times 10^{-5} \text{ m}$$

Fuerzas modales:

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 183652 & -91826 & 0 \\ -91826 & 183652 & -91826 \\ 0 & -91826 & 91826 \end{bmatrix} \cdot (\underline{\Phi}_1 \times z_1^{\max} + \underline{\Phi}_2 \times z_2^{\max} + \underline{\Phi}_3 \times z_3^{\max}) \quad (6.105)$$

Modo 1:

$$\begin{bmatrix} F_{11} \\ F_{21} \\ F_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 183652 & -91826 & 0 \\ -91826 & 183652 & -91826 \\ 0 & -91826 & 91826 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1.76 \\ 2.10 \end{bmatrix} \cdot 6.14 \times 10^{-3} \right) = \begin{bmatrix} 135 \\ 238 \\ 191 \end{bmatrix} \text{ kN} \quad (6.106)$$

Modo 2:

$$\begin{bmatrix} F_{12} \\ F_{22} \\ F_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 183652 & -91826 & 0 \\ -91826 & 183652 & -91826 \\ 0 & -91826 & 91826 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0.195 \\ -0.962 \end{bmatrix} \cdot 2.94 \times 10^{-4} \right) = \begin{bmatrix} 48.7 \\ 9.5 \\ -31.2 \end{bmatrix} \text{ kN} \quad (6.107)$$

Modo 3:

$$\begin{bmatrix} F_{13} \\ F_{23} \\ F_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 183652 & -91826 & 0 \\ -91826 & 183652 & -91826 \\ 0 & -91826 & 91826 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1.455 \\ 1.116 \end{bmatrix} \cdot 2.92 \times 10^{-5} \right) = \begin{bmatrix} 9.3 \\ -14.0 \\ 6.9 \end{bmatrix} kN \quad (6.108)$$

Aplicando criterio CQC y considerando únicamente el primer modo, dado que corresponde al 92% de la masa total, se tiene (ver figura 6.12):

$$\begin{bmatrix} F_1^{\max} \\ F_2^{\max} \\ F_3^{\max} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 191 + 238 + 135 \\ 191 + 238 \\ 191 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 564 \\ 429 \\ 191 \end{bmatrix} kN \Rightarrow Q_0 = 564 kN \quad (6.109)$$

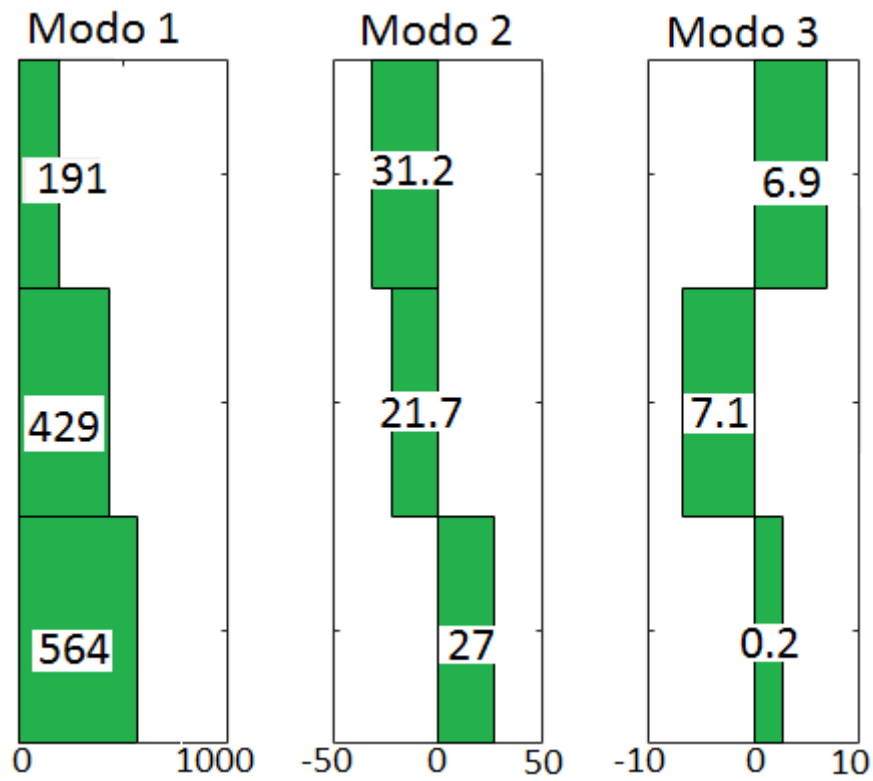


Figura 6.16: Esfuerzos de corte por piso y modo de vibrar. En este caso controla el Modo 1.

Desplazamientos:

$$\begin{bmatrix} u_1^{\max} \\ u_2^{\max} \\ u_3^{\max} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0000 & 1.0000 & 1.000 \\ 1.7594 & 0.1953 & -1.4548 \\ 2.0955 & -0.9618 & 1.1163 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6.14 \times 10^{-3} \\ 2.94 \times 10^{-4} \\ 2.92 \times 10^{-5} \end{bmatrix} \quad (6.110)$$

Criterio de superposición CQC, considerando solo el primer modo:

$$\begin{bmatrix} u_1^{\max} \\ u_2^{\max} \\ u_3^{\max} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +6.14 \\ 10.80 \\ 12.87 \end{bmatrix} \times 10^{-3} \quad (6.111)$$

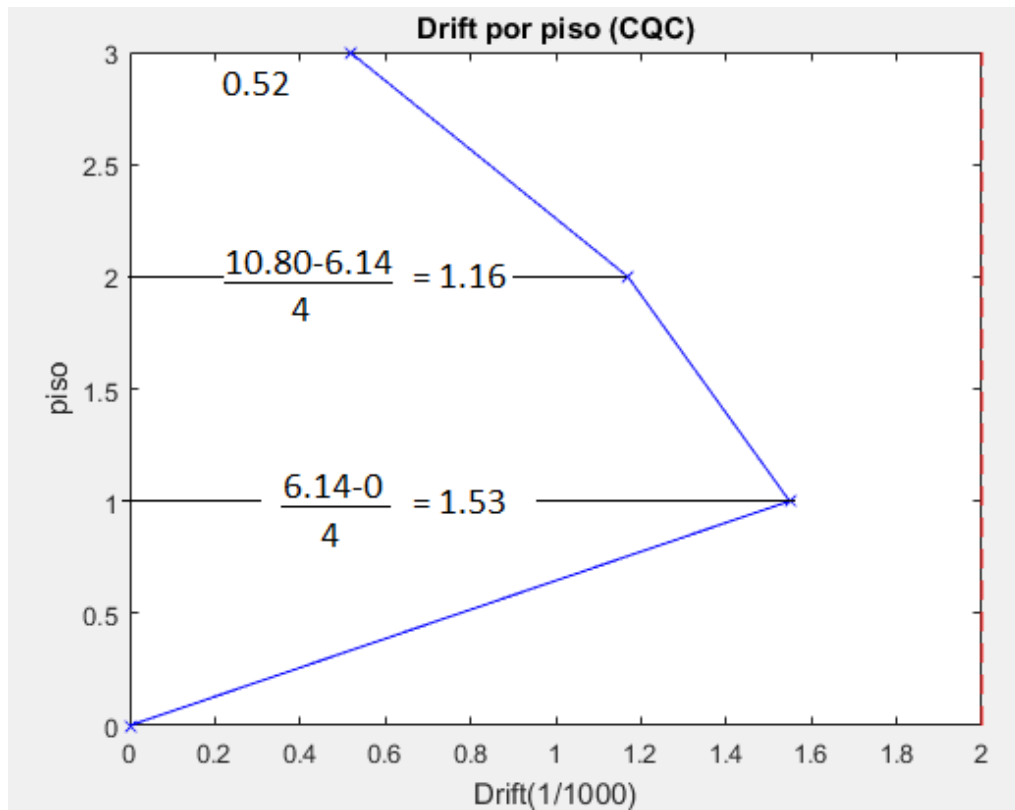


Figura 6.17: Desplazamientos de entrepiso. Se verifica que todos los “drift” son menores al dos mil de la altura del entrepiso.

CAPITULO 7

ANALISIS PSEUDO TRIDIMENSIONAL

7.1 Introducción

El análisis pseudo tridimensional consiste en separar y analizar en forma independiente cada una de las líneas resistentes verticales y obtener sus respectivas matrices de rigidez, para luego llevar estas rigideces en coordenadas de líneas (concepto de traza del eje resistente) a coordenadas globales, asumiendo la existencia de un diafragma rígido horizontal que vincula los desplazamientos de todas las líneas resistentes.

7.2 Grados de libertad por piso

Sea un sistema de referencia ortogonal x, y, z ligado a la base del edificio, con origen en el nivel basal y eje vertical z dirigido hacia arriba. La posición del origen en el plano basal y la dirección del eje x son arbitrarias. El movimiento de un diafragma horizontal rígido i , ubicado a la altura z_i sobre el nivel basal, puede ser descrito por dos traslaciones u_i, v_i paralelas a los ejes coordenados x e y respectivamente del punto $(0,0,z_i)$ y por un giro θ_i en planta, ver Figura 7.1.

Desplazamientos que se agrupan en los vectores $\underline{u}, \underline{v}, \underline{\theta}$ de n componentes cada uno, siendo n el número de piso y teniendo el sistema $3 \cdot n$ grados de libertad.

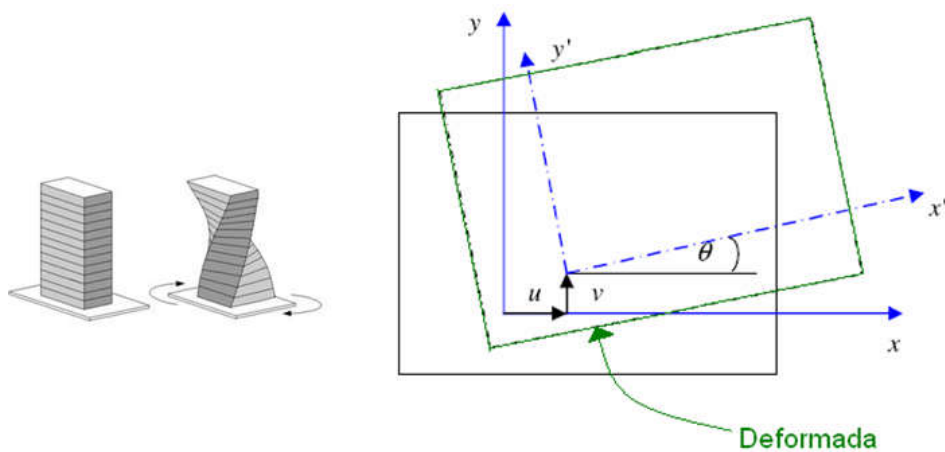


Figura 7.1: Vista en planta de un diafragma rígido y su respectiva deformada.

El movimiento del diafragma se puede descomponer en tres movimientos, dos traslaciones y un giro del plano (diafragma) tal como se indica en Figura 7.2.

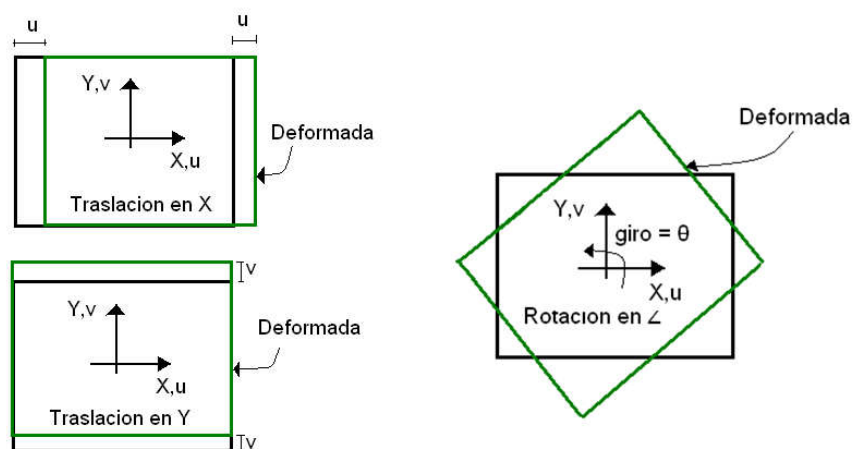


Figura 7.2: Descomposición del movimiento del diafragma.

Consideremos un muro vertical rectangular arbitrario denominado " p " conectado al diafragma rígido i , su posición con respecto al sistema de coordenadas se puede definir

utilizando su traza (plano medio) y las coordenadas polares r_p, ϕ_p del punto "p", ubicado al pie de la normal trazada a ella desde el origen.

Considerando la hipótesis de pequeños desplazamientos, el muro puede desplazarse sobre su traza sin variar sus coordenadas polares. Tomando el eje X como eje polar se tiene (ver Figura 7.3):

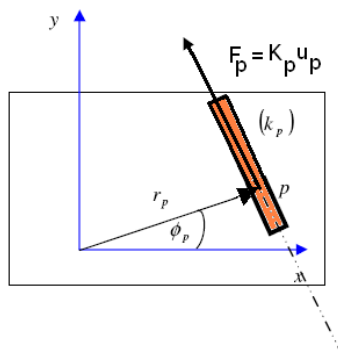


Figura 7.3: Posición del muro rectangular p .

El elemento "p" tiene una matriz de rigidez horizontal $\underline{\underline{K_p}}$ para fuerzas horizontales en su plano, las que se denominarán $\underline{F_p}$ (fuerzas horizontales que se ubican en la dirección del elemento p). Designando los desplazamientos horizontales del elemento según la dirección de su traza por $\underline{u_p}$, se tiene la relación fuerza deformación:

$$\underline{F_p} = \underline{\underline{K_p}} \times \underline{u_p} \quad (7.1)$$

Por convención se signos, se elige como sentido positivo de la traza, aquel en que hay que recorrerla para ver el origen a la izquierda; o, lo que es equivalente, el sentido en que avanza el elemento "p" si aumenta ϕ_p . Hay un caso de indeterminación, si $r_p = 0$

; para levantarla, puede desplazarse la traza en un δr_p , hacia cualquier lado; se define el ϕ_p correspondiente y luego hacer $\delta r_p = 0$.

Los desplazamientos del elemento "p" en la dirección de la traza: u_{pi} dependen del movimiento del diafragma i en las coordenadas globales: u_i , v_i , θ_i y de las respectivas coordenadas polares ϕ_p , r_p siendo independientes de la posición del elemento "p" sobre la traza, pudiendo desplazarse el elemento sobre ésta sin alterar los u_{pi} .

Si el elemento tiene además rigidez torsional, se agregará un momento torsor proporcional a $\underline{\underline{K_{\theta q}}} \cdot \underline{\theta}$ para giros $\underline{\theta}$ de los diafragmas.

7.3 Matriz de rigidez

Las condiciones de compatibilidad geométrica se establecen igualando los desplazamientos u_{pi} de los elementos verticales con los de los puntos del diafragma i situados en su intersección.

La Figura 7.4 establece las relaciones entre los u_{pi} y cada una de las componentes u_i , v_i , θ_i del movimiento del diafragma, consideradas actuando separadamente:

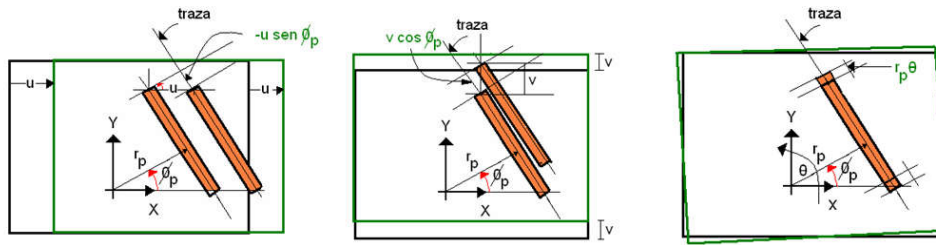


Figura 7.4.: Descomposición del movimiento del diafragma, en dos traslaciones y una rotación.

Para una traslación u_i , el elemento avanza en la dirección de su traza en $-u_i \text{sen} \phi_p$; para una traslación v_i , avanza en $v_i \text{cos} \phi_p$; para un giro θ_i , en $r_p \cdot \theta_i$. Superponiendo los desplazamientos del muro "p" a nivel z_i en la dirección de la traza, se tiene:

$$u_{p_i} = -u_i \cdot \text{sen} \phi_p + v_i \cdot \text{cos} \phi_p + r_p \cdot \theta_i \quad (7.2)$$

Condiciones de compatibilidad que pueden agruparse en el vector de desplazamientos, que incluye a todos los pisos de la estructura:

$$\underline{u_p} = -\underline{u} \cdot \text{sen} \phi_p + \underline{v} \cdot \text{cos} \phi_p + \underline{\theta} \cdot r_p \quad (7.3)$$

Reemplazando en la relación fuerza-deformación de ecuación (7.1), se tiene:

$$\underline{F_p} = \underline{K_p} \cdot \left[-\underline{u} \cdot \text{sen} \phi_p + \underline{v} \cdot \text{cos} \phi_p + \underline{\theta} \cdot r_p \right] \quad (7.4)$$

Si el elemento además tiene rigidez torsional, tomara de los diafragmas momentos de torsión, iguales a:

$$\underline{M}_q = \underline{K}_{\theta q} \cdot \underline{\theta} \quad (7.5)$$

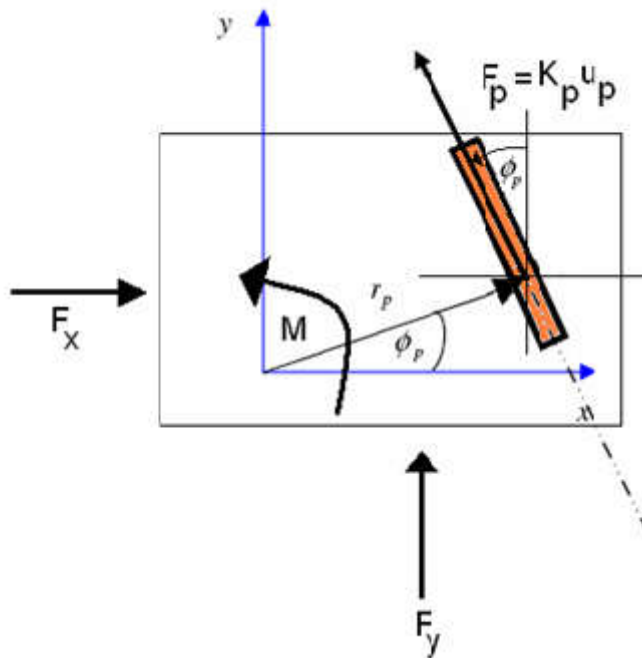


Figura 7.5.: Aplicación de fuerzas estáticas equivalentes.

Las ecuaciones de equilibrio referidas al sistema de ejes globales, establece que la resultante de las fuerzas de inercia y el momento resultante respecto del eje z son iguales a las resultantes de las fuerzas aplicadas $\underline{F}_p$ y los momentos $\underline{M}_q$ de cada una de las subestructuras verticales:

$$F_X = -\sum_{p=1}^n \underline{F}_p \cdot \text{sen} \phi_p = \quad (7.6)$$

$$-\sum_{p=1}^n \left[\underline{K}_p \cdot (-\underline{u} \cdot \text{sen} \phi_p + \underline{v} \cdot \cos \phi_p + \underline{\theta} \cdot r_p) \right] \cdot \text{sen} \phi_p$$

$$F_Y = \sum_{p=1}^n \underline{F}_p \cdot \cos \phi_p = \quad (7.7)$$

$$\sum_{p=1}^n \left[\underline{K}_p \cdot (-\underline{u} \cdot \text{sen} \phi_p + \underline{v} \cdot \cos \phi_p + \underline{\theta} \cdot r_p) \right] \cdot \cos \phi_p$$

$$M = \sum_{p=1}^n \underline{F}_p \cdot r_p + \sum_{q=1}^m \underline{M}_q = \quad (7.8)$$

$$\sum_{p=1}^n \left[\underline{K}_p \cdot (-\underline{u} \cdot \text{sen} \phi_p + \underline{v} \cdot \cos \phi_p + \underline{\theta} \cdot r_p) \right] \cdot r_p + \sum_{q=1}^m \underline{K}_{\theta q} \cdot \underline{\theta}$$

Reordenando términos, se obtiene la matriz de rigidez horizontal del sistema estructural:

$$\begin{bmatrix} \underline{F}_X \\ \underline{F}_Y \\ \underline{M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underbrace{\sum_{i=1}^n \underline{K}_p \cdot \text{sen}^2 \phi_p}_{K_{XX}} & \underbrace{-\sum_{i=1}^n \underline{K}_p \cdot \cos \phi_p \text{sen} \phi_p}_{K_{XY}} & \underbrace{-\sum_{i=1}^n \underline{K}_p \cdot r_p \text{sen} \phi_p}_{K_{XZ}} \\ \underbrace{-\sum_{i=1}^n \underline{K}_p \cdot \cos \phi_p \text{sen} \phi_p}_{K_{YX}=K_{XY}} & \underbrace{\sum_{i=1}^n \underline{K}_p \cdot \cos^2 \phi_p}_{K_{YY}} & \underbrace{\sum_{i=1}^n \underline{K}_p \cdot r_p \cos \phi_p}_{K_{YX}} \\ \underbrace{-\sum_{i=1}^n \underline{K}_p \cdot r_p \text{sen} \phi_p}_{K_{ZX}} & \underbrace{\sum_{i=1}^n \underline{K}_p \cdot r_p \cos \phi_p}_{K_{ZY}=K_{YZ}} & \underbrace{\sum_{i=1}^n \underline{K}_p \cdot r_p^2 + \sum_{q=1}^m \underline{K}_{\theta q}}_{K_{ZZ}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{u} \\ \underline{v} \\ \underline{\theta} \end{bmatrix} \quad (7.9)$$

Una regla nemotécnica para recordar la composición de esta matriz para una subestructura vertical, es utilizar el siguiente esquema:

	$-\text{sen}\phi_p$	$\cos\phi_p$	r_p
$-\text{sen}\phi_p$	$\text{sen}^2\phi_p$	$-\text{sen}\phi_p \cdot \cos\phi_p$	$-r_p \cdot \text{sen}\phi_p$
$\cos\phi_p$	$-\text{sen}\phi_p \cdot \cos\phi_p$	$\cos^2\phi_p$	$r_p \cdot \cos\phi_p$
r_p	$-r_p \cdot \text{sen}\phi_p$	$r_p \cdot \cos\phi_p$	r_p^2

Tabla 7.1.: Componentes de la matriz de rigidez horizontal.

En resumen se ensamblan las rigideces de las distintas subestructuras verticales referidas a sus coordenadas de línea, a una rigidez global que depende del punto (origen) al cual se refiera.

Por ejemplo, considérese la estructuración en base a muros de la Figura 7.6., caracterizada por la simetría y por el hecho que todos los muros son paralelos a los ejes coordenados.

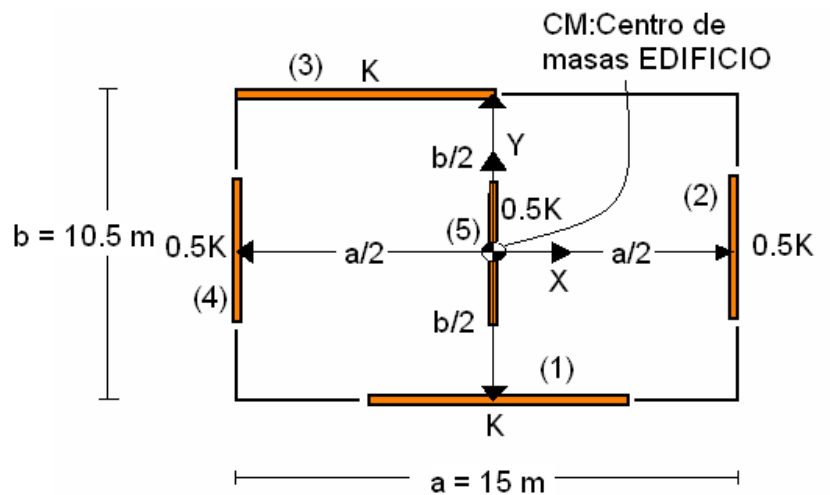


Figura 7.6.: Planta de la estructura de un piso, estructurada en base a muros.

Las coordenadas polares de cada una de las subestructuras verticales con respecto a las respectivas trazas de cada uno de los muros, viene dada por:

Muro	r_p	ϕ_p
1	$0.5b$	270°
2	$0.5a$	0
3	$0.5b$	90°
4	$0.5a$	180°
5	$\delta r \rightarrow 0$	0

Tabla 7.2: Coordenadas polares de cada sub estructura con respecto a sistema de coordenadas ortogonal ubicado en el CM.

En Tabla 7.2, se consideró que las trazas de cada muro tienen la dirección positiva definida según lo indicado en Figura 7.7:

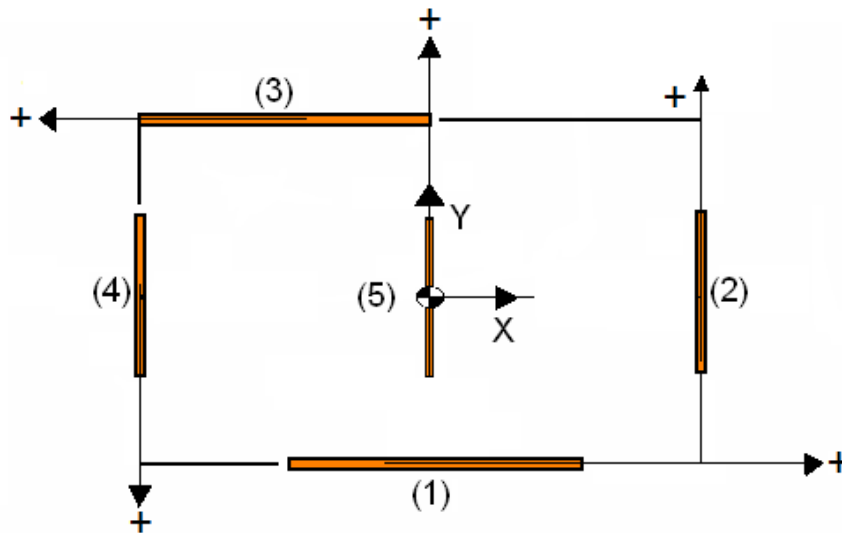


Figura 7.7.: Direcciones de las trazas positivas de cada una de la subestructuras verticales.

Aplicando las transformaciones de ecuación (7.9), la matriz de rigidez queda:

$$K_{xx} = \quad (7.10)$$

$$K \cdot \text{sen}^2(270) + 0.5K \cdot \text{sen}^2(0) + K \cdot \text{sen}^2(90) + 0.5K \cdot \text{sen}^2(180) + 0.5K \cdot \text{sen}^2(0) = 2K$$

$$K_{xy} = K_{yx} = \quad (7.11)$$

$$-(K \cdot \text{sen}(270)\cos(270) + 0.5K \cdot \text{sen}(0)\cos(0) + K \cdot \text{sen}(90)\cos(0) + 0.5K \cdot \text{sen}(180)\cos(180) + 0.5K \cdot \text{sen}(0)\cos(0)) = 0$$

$$K_{xz} = K_{zx} = \quad (7.12)$$

$$-(0.5bK \cdot \text{sen}(270) + 0.5a \cdot 0.5K \cdot \text{sen}(0) + 0.5b \cdot K \cdot \text{sen}(90) + 0.5a \cdot 0.5K \cdot \text{sen}(180) + 0 \cdot 0.5K \cdot \text{sen}(0)) = 0$$

$$K_{yy} = \quad (7.13)$$

$$K \cdot \cos^2(270) + 0.5K \cdot \cos^2(0) + K \cdot \cos^2(90) + 0.5K \cdot \cos^2(180) + 0.5K \cdot \cos^2(0) = 1.5K$$

$$K_{yz} = K_{zy} = \quad (7.14)$$

$$(0.5bK \cdot \cos(270) + 0.5a \cdot 0.5K \cdot \cos(0) + 0.5b \cdot K \cdot \cos(90) + 0.5a \cdot 0.5K \cdot \cos(180) + 0 \cdot 0.5K \cdot \cos(0)) = 0$$

$$K_{zz} = (0.5b)^2 K + (0.5a)^2 \cdot 0.5K + (0.5b)^2 \cdot K + \quad (7.15)$$

$$(0.5a)^2 \cdot 0.5K = \left[2 \cdot \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \right] K = 111.375K$$

Luego la matriz de rigidez horizontal de la estructura, se define por:

$$\underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 111.375 \end{bmatrix} \quad (7.16)$$

Se concluye, que cuando una estructuración se compone de muros paralelos a los ejes coordenados el término $K_{XY} = 0$. Adicionalmente si presenta simetría los términos

$K_{XZ} = K_{YZ} = 0$, quedando la matriz de rigidez diagonal.

En este caso y tal como se explicara más adelante, el movimiento se desacopla en dos traslaciones y una rotación con respecto a los ejes coordenados definidos en el centro de masas.

7.4 Edificios con elementos de rigidez proporcional

Sea $\underline{\underline{K}} = k_p [A]$ válido para toda subestructura vertical, diferenciándose las matrices de rigidez en el factor escalar k_p , en este caso es posible escribir:

$$\underline{\underline{K}}_{XX} = \left\{ \sum k_p \sin^2 \phi_p \right\} [A] \quad (7.17)$$

$$\underline{\underline{K}}_{YY} = \left\{ \sum k_p \cos^2 \phi_p \right\} [A] \quad (7.18)$$

$$\underline{\underline{K}}_{ZZ} = \left\{ \sum k_p r_p^2 + \sum k_{\alpha_j} \right\} [A] \quad (7.19)$$

7.5 Matriz de rigidez con respecto a ejes principales

Puesto que la matriz de rigidez se estimó con respecto a un sistema de ejes coordenados ubicados en forma arbitraria, es posible definirla con respecto a cualquier otro sistema ortogonal. Una transformación de coordenadas que presenta utilidad es aquella con respecto al cual la matriz de rigidez del sistema se hace diagonal.

Por ejemplo para la estructuración no simétrica de la figura 7.8, se tiene:

$$\underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix} K_{XX} & K_{XY} & K_{XZ} \\ K_{XY} & K_{YY} & K_{YZ} \\ K_{XZ} & K_{YZ} & K_{ZZ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2K & 0 & -\frac{b}{4}K \\ 0 & 1.5K & -\frac{a}{8}K \\ -\frac{b}{4}K & -\frac{a}{8}K & \frac{5K}{16}(b^2 + \frac{a^2}{2}) \end{bmatrix} \quad (7.20)$$

La solución del sistema de ecuaciones definido para un sismo en la dirección del eje X (ecuación 7.21), indica que los desplazamientos se acoplan, es decir, no solo se produce traslación en ambos ejes, sino que además ambos desplazamientos u y v van acompañados de la rotación del diafragma rígido.

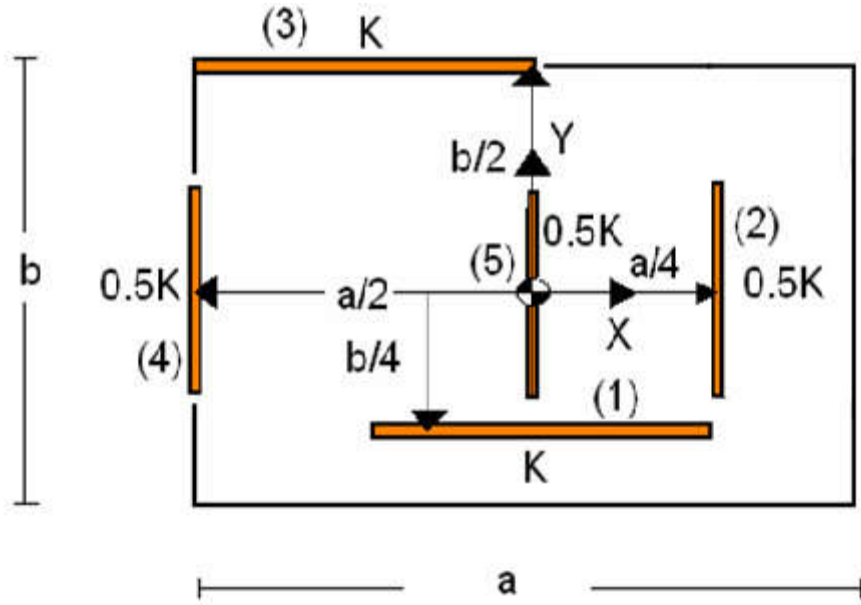


Figura 7.8.: Estructuración no simétrica correspondiente a un edificio de un nivel.

$$\begin{bmatrix} F \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2K & 0 & -\frac{b}{4}K \\ 0 & 1.5K & -\frac{a}{8}K \\ -\frac{b}{4}K & -\frac{a}{8}K & \frac{5K}{16}(b^2 + \frac{a^2}{2}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \\ \theta \end{bmatrix} \quad (7.21)$$

Para desacoplar el movimiento en tres movimientos independientes (dos traslaciones y una rotación), la matriz de rigidez debe transformarse a una matriz diagonal, es decir, todos los términos fuera de la diagonal deben ser nulos ($K_{xy} = K_{xz} = K_{yz} = 0$).

Para lograr lo anterior y a partir de la matriz de rigidez completa, se procede la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \underline{F}_X \\ \underline{F}_Y \\ \underline{M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{XX} & K_{XY} & K_{XZ} \\ K_{XY} & K_{YY} & K_{YZ} \\ K_{XZ} & K_{YZ} & K_{ZZ} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{u} \\ \underline{v} \\ \underline{\theta} \end{bmatrix} \quad (7.22)$$

Rotando el sistema de ejes iniciales en α (ver Figura 7.9), redefiniendo la traza del muro "p" y recalculando los respectivos términos de la matriz de rigidez con respecto al nuevo sistema de ejes coordenados $x' y'$ se tiene:

$$\begin{aligned} K_{X'Y'} &= -\sum_{i=1}^p K_p \cos \phi'_p \cdot \text{sen} \phi'_p = -\sum_{i=1}^p K_p \frac{\text{sen } 2 \phi'_p}{2} = \\ &= -\sum_{i=1}^p K_p \frac{\text{sen } 2 (\phi_p - \alpha)}{2} = 0 \end{aligned} \quad (7.23)$$

Con $(r'_p = r_p, \phi'_p); \phi'_p = \phi_p - \alpha$

Desarrollando el ángulo doble $(\text{sen}(a+b) = \text{sen}a \cdot \cos b + \text{sen}b \cdot \cos a)$ y multiplicando (7.23) por -2, se tiene:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^p K_p \text{sen } 2 (\phi_p - \alpha) &= \sum_{i=1}^p K_p \text{sen} 2 \phi_p \cdot \cos 2\alpha - \\ \sum_{i=1}^p K_p \cos 2 \phi_p \cdot \text{sen} 2\alpha &= 0 \end{aligned} \quad (7.24)$$

$$\Rightarrow \tan 2\alpha = \frac{\sum_{i=1}^p K_p \sin 2\phi_p}{\sum_{i=1}^p K_p \cos 2\phi_p} = \frac{2 \sum_{i=1}^p K_p \sin \phi_p \cos \phi_p}{\sum_{i=1}^p K_p \cos^2 \phi_p - \sum_{i=1}^p K_p \sin^2 \phi_p} =$$

$$\frac{-2K_{XY}}{K_{YY} - K_{XX}} = \frac{K_{XY}}{\frac{(K_{XX} - K_{YY})}{2}}$$

Si los muros son paralelos a los ejes coordenados iniciales, se tiene $K_{XY} = 0$ y por lo tanto no es necesario girar los ejes en α . Al contrario si $K_{XY} \neq 0$ existe un valor $0 < 2\alpha < \pi$ que resuelve el problema.

Con respecto al nuevo sistema de ejes coordenados $x'y'$ (girado en α), se cumple que $K_{x'y'} = K_{y'x'}$.

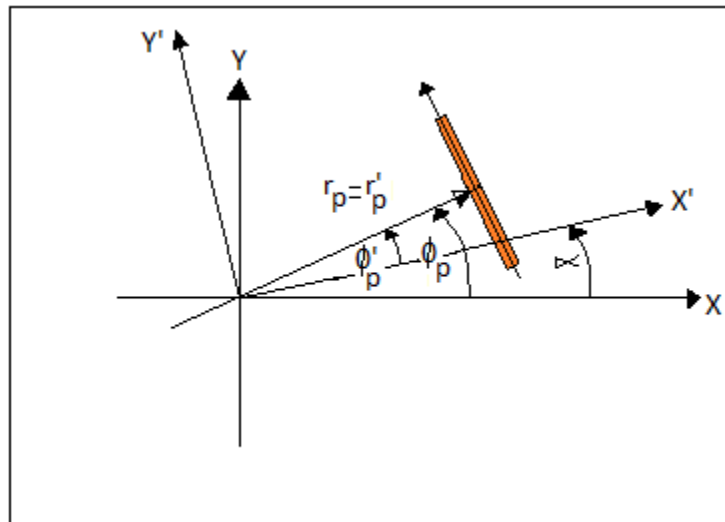


Figura 7.9.: Rotación de ejes coordenados.

Si ahora traslademos en forma paralela el origen del sistema $x'y'$ en a y b (ver Figura 7.10) a una nueva posición $\bar{x}\bar{y}$, las coordenadas de la traza del muro se pueden estimar a partir de:

$$\bar{r}_p = r'_p - a \cos \phi'_p - b \sin \phi'_p, \quad (7.25)$$

$$\phi'_p = \bar{\phi}_p$$

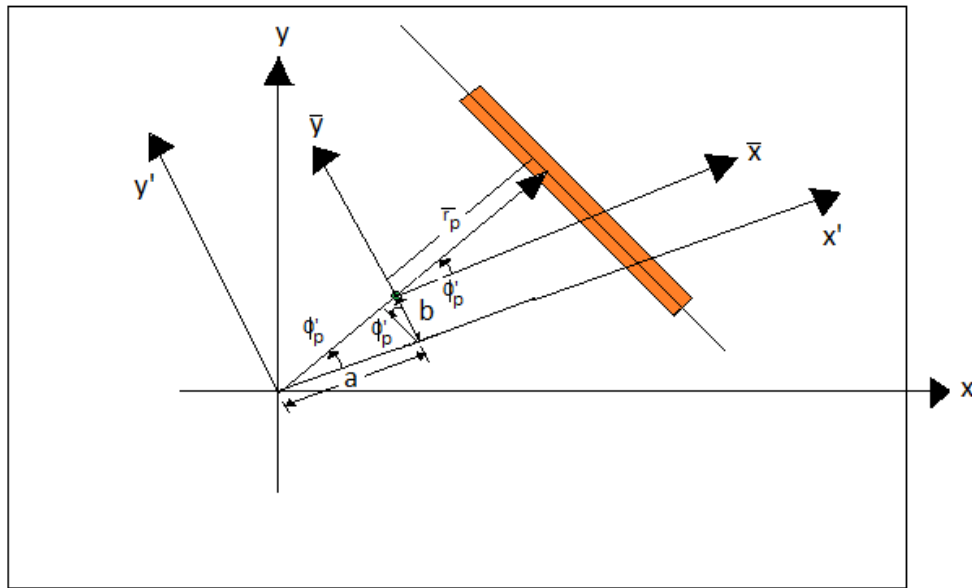


Figura 7.10.: Traslación paralela de los ejes coordenados $x'y'$.

Recalculando los términos de la matriz de rigidez ahora con respecto a este nuevo sistema de referencia $\bar{x}\bar{y}$, se tiene que los coeficientes de rigidez $K_{\bar{x}\bar{x}}, K_{\bar{y}\bar{y}}$ no cambian puesto que no dependen de la distancia $\bar{r}_p$ y que $K_{\bar{x}\bar{y}}$ es nulo dado que $\phi'_p = \bar{\phi}_p$. Ahora podemos definir el valor de las traslaciones a y b para que los

restantes términos $K_{\bar{X}'\bar{Z}'}$ y $K_{\bar{Y}'\bar{Z}'}$ sean nulos, logrando así tener una matriz de rigidez diagonal. La nueva estructura de esta matriz se debe a que los ejes $\bar{x}\bar{y}$ son ejes principales de rigidez, lo cual conlleva que la matriz de rigidez solo tenga términos en su diagonal.

Para definir los valores de a y b , se puede plantear el siguiente sistema de ecuaciones:

$$K_{\bar{X}\bar{Z}} = -\sum_{i=1}^p K_p \bar{r}_p \text{sen} \phi'_p = -\sum_{i=1}^p K_p (r'_p - a \cos \phi'_p - b \text{sen} \phi'_p) \text{sen} \phi'_p = 0 \quad (7.24)$$

$$K_{\bar{Y}\bar{Z}} = \sum_{i=1}^p K_p \bar{r}_p \cos \phi'_p = \sum_{i=1}^p K_p (r'_p - a \cos \phi'_p - b \text{sen} \phi'_p) \cos \phi'_p = 0 \quad (7.25)$$

$$\begin{aligned} -\sum_p K_p r'_p \text{sen} \phi'_p + a \sum_p K_p \cos \phi'_p \text{sen} \phi'_p + b \sum_p K_p \text{sen}^2 \phi'_p &= 0 \\ \sum_p K_p r'_p \cos \phi'_p - a \sum_p K_p \cos^2 \phi'_p - b \sum_p K_p \text{sen} \phi'_p \cos \phi'_p &= 0 \end{aligned} \quad (7.26)$$

O bien

$$\begin{aligned} -aK_{X'Y'} + bK_{X'X'} + K_{X'Z'} &= 0 \\ -aK_{Y'Y'} + bK_{X'Y'} + K_{Y'Z'} &= 0 \end{aligned} \quad (7.27)$$

Puesto que $K_{X'Y'} = 0$, se tiene que las coordenadas del origen del sistema de ejes principales viene dado por:

$$a = \frac{K_{Y'Z'}}{K_{Y'Y'}} \quad b = -\frac{K_{X'Z'}}{K_{X'X'}} \quad (7.28)$$

Donde a y b determinan las coordenadas del origen del sistema de ejes principales de rigidez.

El factor $K_{\bar{z}\bar{z}}$ puede ser calculado directamente:

$$\begin{aligned} K_{\bar{z}\bar{z}} &= \sum_p K_p \bar{r}_p^2 = \sum_p K_p (r_p' - a \cos \phi_p' - b \sin \phi_p')^2 \\ &= \sum_p K_p r_p'^2 + \sum_p K_p a^2 \cos^2 \phi_p' + \sum_p K_p b^2 \sin^2 \phi_p' \\ &\quad - 2 \sum_p K_p r_p' a \cos \phi_p' - 2 \sum_p K_p r_p' b \sin \phi_p' + 2 \sum_p K_p ab \cos \phi_p' \sin \phi_p' \\ K_{\bar{z}\bar{z}} &= K_{Z'Z'} + a^2 K_{Y'Y'} + b^2 K_{X'X'} - 2a K_{Y'Z'} + 2b K_{X'Z'} - 2ab K_{X'Y'} \end{aligned} \quad (7.29)$$

$$\begin{aligned} K_{\bar{z}\bar{z}} &= K_{Z'Z'} + a^2 K_{Y'Y'} + b^2 K_{X'X'} - 2 \frac{K_{Y'Z'}}{K_{Y'Y'}} K_{Y'Z'} \frac{K_{Y'Y'}}{K_{Y'Y'}} - \\ &\quad 2 \frac{K_{X'Z'}}{K_{X'X'}} K_{X'Z'} \frac{K_{X'X'}}{K_{X'X'}} \\ K_{\bar{z}\bar{z}} &= K_{Z'Z'} - a^2 K_{Y'Y'} - b^2 K_{X'X'} \end{aligned} \quad (7.30)$$

Quedando la matriz referida al sistema de ejes principales, por lo que el sistema se desacopla en tres ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} K_{\bar{X}\bar{X}} & 0 & 0 \\ 0 & K_{\bar{Y}\bar{Y}} & 0 \\ 0 & 0 & K_{\bar{z}\bar{z}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{\bar{X}} \\ F_{\bar{Y}} \\ M_{\bar{\theta}} \end{bmatrix} \quad (7.31)$$

$$\bar{u} = \frac{F_{\bar{X}}}{K_{\bar{X}\bar{X}}} ; \bar{v} = \frac{F_{\bar{Y}}}{K_{\bar{Y}\bar{Y}}} ; \bar{\theta} = \frac{M_{\bar{\theta}}}{K_{\bar{Z}\bar{Z}}} \quad (7.32)$$

$$F_{p_i} = K_{p_i} \cdot \bar{u} = K_{p_i} \frac{F_{\bar{X}}}{K_{\bar{X}\bar{X}}} \quad (7.33)$$

Para el edificio de la Figura 7.8, se tiene:

$$a = \frac{K_{Y'Z'}}{K_{Y'Y'}} = \frac{-\frac{a}{8}K}{1.5K} = -\frac{a}{12} \quad b = -\frac{K_{X'Z'}}{K_{X'X'}} = -\frac{-\frac{b}{4}K}{2K} = \frac{b}{8} \quad (7.34)$$

$$K_{\bar{z}\bar{z}} = K_{Z'Z'} - a^2 K_{Y'Y'} - b^2 K_{X'X'} = K \left(\frac{9}{32} b^2 + \frac{7}{48} a^2 \right) \quad (7.35)$$

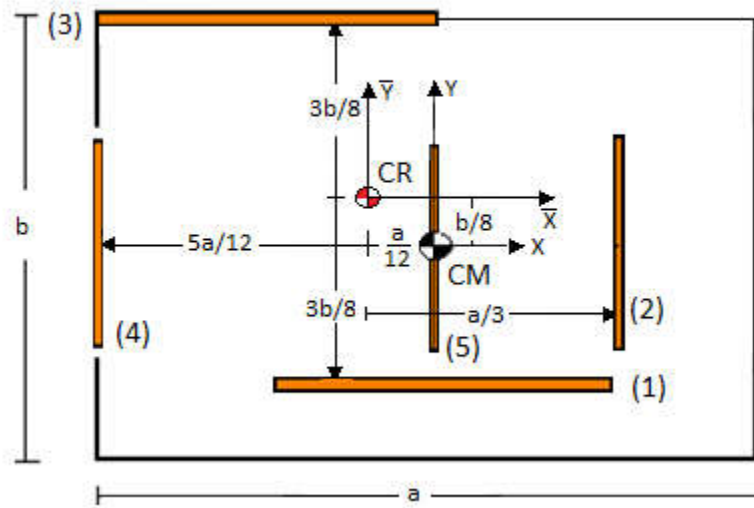


Figura 7.11.: Ubicación del Centro de rigidez de la planta.

Para sismo en X , el movimiento se desacopla en una traslación y un giro con respecto al CR:

$$\begin{bmatrix} F \\ 0 \\ \frac{Fb}{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2K & 0 & 0 \\ 0 & 1.5K & 0 \\ 0 & 0 & K(\frac{9}{32}b^2 + \frac{7}{48}a^2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{\theta} \end{bmatrix} \Rightarrow \quad (7.36)$$

$$\bar{u} = \frac{F}{2K}, \quad \bar{\theta} = \frac{\frac{Fb}{8}}{K(\frac{9}{32}b^2 + \frac{7}{48}a^2)},$$

Considerando la estructuración definida en Figura 7.8, y considerando una planta de dimensiones de 10×8 ($a=10$ y $b=8$ ver Figura 7.11), las fuerzas por traslación en los muros paralelos al eje X (muros 1 y 3):

$$F_1 = K \cdot \left[-\frac{F}{2K} \cdot \text{sen}(270) \right] = \frac{F}{2} \quad (7.37)$$

$$F_3 = K \cdot \left[-\frac{F}{2K} \cdot \text{sen}(90) \right] = -\frac{F}{2}$$

Nótese que $F_3 = -\frac{F}{2}$ es negativa, es decir, tiene el sentido contrario al de la traza positiva definida en Figura 7.7.

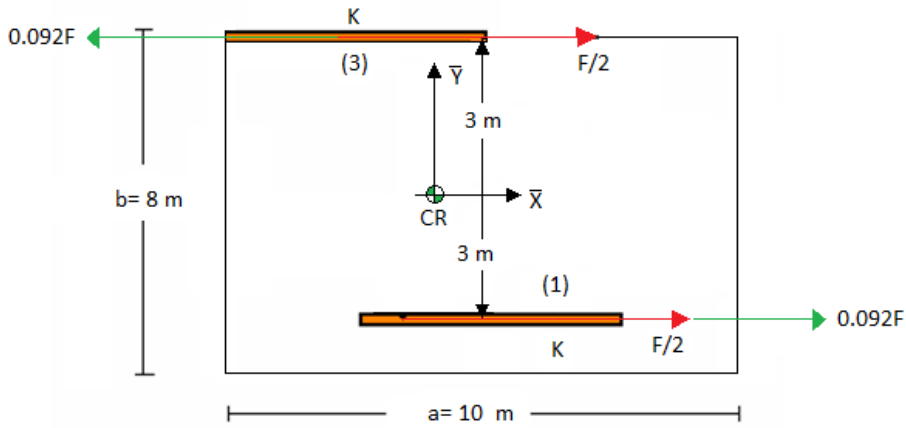


Figura 7.12.: Fuerzas por traslación y por rotación en muros paralelos al eje $\bar{X}$.

Las fuerzas por rotación en los muros paralelos al eje $\bar{X}$ (muros 1 y 3):

$$F_1 = K \cdot \left[0.0307 \frac{F}{K} \times 3 \right] = 0.092F \quad (7.38)$$

$$F_3 = K \cdot \left[0.0307 \frac{F}{K} \times 3 \right] = 0.092F$$

Nótese que la fuerza resultante (suma de las fuerzas de traslación y rotación) en el muro 1 es igual $0.5 F + 0.092 F = 0.592 F$ en cambio, sobre el muro 3 es $-0.5 F + 0.092 F = -0.408 F$ (pues estas se contrarrestan).

Para sismo en $\bar{Y}$, el movimiento se desacopla en una traslación y un giro con respecto al CR:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ F \\ \frac{Fa}{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2K & 0 & 0 \\ 0 & 1.5K & 0 \\ 0 & 0 & K(\frac{9}{32}b^2 + \frac{7}{48}a^2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \\ \theta \end{bmatrix} \Rightarrow \quad (7.39)$$

$$v = \frac{F}{1.5K}, \quad \theta = \frac{\frac{Fa}{12}}{K(\frac{9}{32}b^2 + \frac{7}{48}a^2)},$$

Las fuerzas por traslación en los muros paralelos al eje $\bar{Y}$ (muros 4,5 y 2):

$$F_4 = 0.5K \cdot \left[\frac{F}{1.5K} \cdot \cos(180) \right] = -\frac{F}{3} \quad (7.40)$$

$$F_5 = 0.5K \cdot \left[\frac{F}{1.5K} \cdot \cos(0) \right] = \frac{F}{3}$$

$$F_2 = 0.5K \cdot \left[\frac{F}{1.5K} \cdot \cos(0) \right] = \frac{F}{3}$$

Las fuerzas por rotación en los muros paralelos al eje $\bar{Y}$ (muros 4,5 y 2):

$$F_4 = 0.5K \cdot \left[0.0256 \frac{F}{K} \times 4.167 \right] = 0.053F \quad (7.41)$$

$$F_5 = 0.5K \cdot \left[0.0256 \frac{F}{K} \times 0.833 \right] = 0.011F$$

$$F_2 = 0.5K \cdot \left[0.0256 \frac{F}{K} \times 3.333 \right] = 0.043F$$

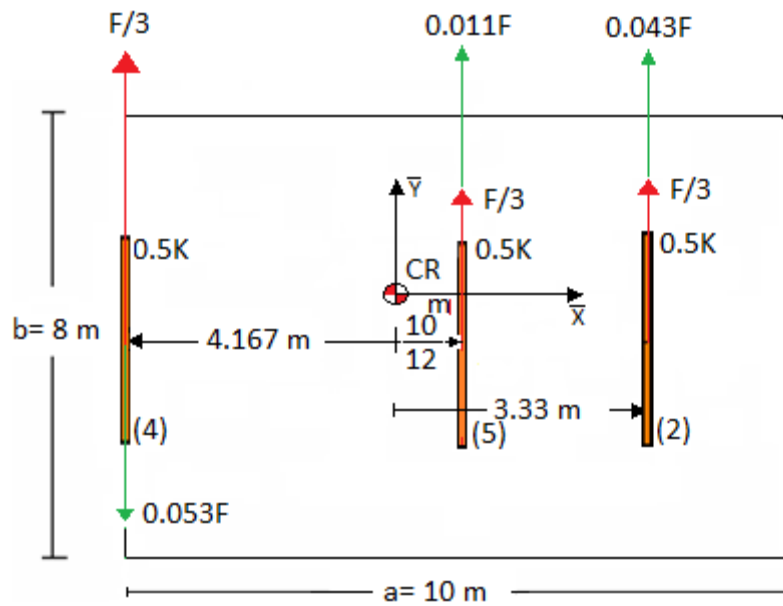


Figura 7.13.: Fuerzas por traslación y por rotación en muros paralelos al eje $\bar{Y}$.

Las respectivas fuerzas resultantes sobre las trazas de los muros 4, 5 y 2 son:

$$F_4 = -\frac{F}{3} + 0.053 F = 0.280 F \quad (7.42)$$

$$F_5 = -\frac{F}{3} - 0.011 F = -0.344 F$$

$$F_2 = -\frac{F}{3} - 0.043 F = -0.376 F$$

Finalmente para los muros paralelos al eje $\bar{X}$ se utilizara una fuerza de corte de diseño única e igual a $F_1 = F_3 = |0.592 F|$ y para los muros paralelos al eje $\bar{Y}$ se utilizara una fuerza de corte de diseño única e igual a $F_4 = F_5 = F_2 = |0.376 F|$.

7.6 Matriz de masa concentrada

Recordemos que en un cuerpo rígido no existe deformación interna y las propiedades inerciales se pueden expresar con respecto al centro de masas, en este caso, la posición de cualquier punto dentro del diafragma se puede describir a partir los dos desplazamientos horizontales y el giro del centro de masas.

El centro de masa o centro de gravedad de un piso, se define como el punto donde se considera aplicada la fuerza sísmica horizontal que actúa en dicho nivel, según la segunda Ley de Newton. Evidentemente, este punto coincide con el punto de aplicación de la resultante de todas las cargas verticales incluidas como masas.

Cuando el sistema de coordenadas coincide con el centroide de la placa y se considera la masa de las columnas despreciable, la matriz de masa de la losa rectangular de la Figura 7.14, queda:

$$\underline{\underline{M}} = \begin{bmatrix} m_t & 0 & 0 \\ 0 & m_t & 0 \\ 0 & 0 & m_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{A} J_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{12} (a^2 + b^2) \end{bmatrix} \quad (7.43)$$

En donde:

$$m_t : \text{Masa traslacional} = m = \frac{W}{g}$$

$$m_r : \text{Masa rotacional} = \frac{m}{A} J_0$$

$$A : \text{Área de la losa} = a \times b$$

$$J_0 : \text{Momento polar de inercia} = I_{xx} + I_{yy} = \frac{1}{12} b a^3 + \frac{1}{12} a b^3$$

$$m_r = \frac{m}{A} J_0 = \frac{m}{ab} \left(\frac{1}{12} b a^3 + \frac{1}{12} a b^3 \right) = \frac{m}{12} (a^2 + b^2)$$

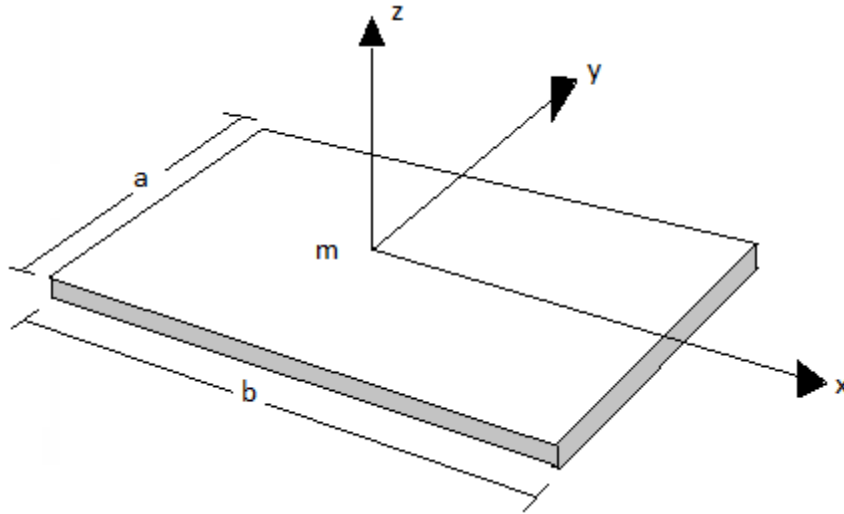


Figura 7.14.: Diafragma horizontal rígido

Para un conjunto de cuerpos rígidos, unidos por conexiones rígidas la matriz de masa con respecto a un sistema arbitrario, se expresa por:

$$\underline{\underline{M}} = \begin{bmatrix} \sum m_i & 0 & -\sum \bar{Y}_i m_i \\ 0 & \sum m_i & \sum \bar{X}_i m_i \\ -\sum \bar{Y}_i m_i & \sum \bar{X}_i m_i & \sum \left(\frac{m}{A} J_0 + M(\bar{X}^2 + \bar{Y}^2) \right) \end{bmatrix} \quad (7.44)$$

En donde las distancias $\bar{X}$ e $\bar{Y}$ se miden desde el origen del sistema al centro de masas. Cuando la aceleración se realiza con respecto al centro de masa $\bar{X} = \bar{Y} = 0$, recuperándose la matriz de ecuación (7.43).

7.7 Ejemplos de aplicación

7.7.1 Cálculo de matriz de masa

Una losa de hormigón armado de espesor igual a 0.15 m actúa como diafragma rígido y tiene una masa concentrada de 3 T en un extremo, ver Figura 7.15. Se pide calcular la matriz de masa con respecto al CM del edificio, si se sabe que densidad del HA es de $24 \frac{kN}{m^3}$ (considere que $1 \text{ kg} = 10 \text{ N}$).

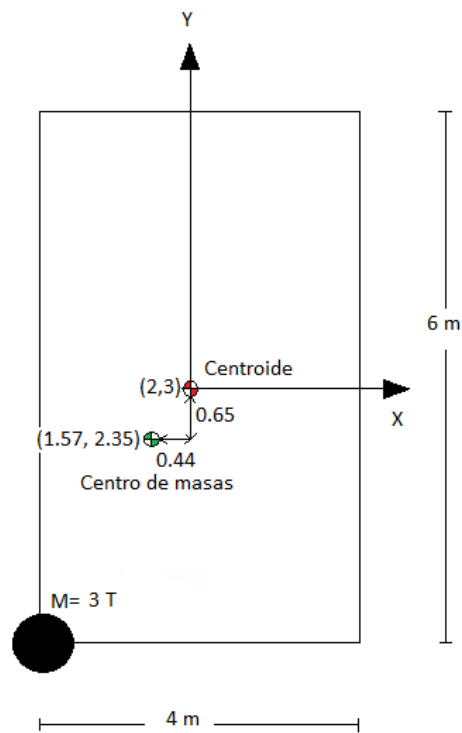


Figura 7.15.: Diafragma horizontal rígido con masa concentrada en esquina inferior.

$$M_{losa} = 24 \frac{kN}{m^3} \cdot 4 \cdot 6 \cdot 0.15 = 10.8 \text{ T}$$

El centroide de la losa se ubica en las coordenadas $(2 \text{ m}, 3 \text{ m})$ y el centro de masa del edificio se estima a partir de:

$$x_{cm} = \frac{\sum x_i m_i}{\sum m_i} = \frac{0 \times 3 + 2 \times 10.8}{13.8} = 1.57 \text{ m} \quad (7.45)$$

$$y_{cm} = \frac{\sum y_i m_i}{\sum m_i} = \frac{0 \times 3 + 3 \times 10.8}{13.8} = 2.35 \text{ m}$$

Luego las coordenadas (1.57, 2.35) corresponden a la ubicación del CM del edificio y será el punto con respecto al cual se harán todos los cálculos.

Matriz masa de la losa (con respecto al CM del edificio):

Masa rotacional de la placa:

$$A = 4 \times 6 = 24 \quad (7.46)$$

$$J_0 = I_{xx} + I_{yy} = \frac{1}{12} 4 \times 6^3 + \frac{1}{12} 6 \times 4^3 = 104 \text{ m}^4$$

$$m_r = \frac{m_t}{A} J_0 = \frac{m_t}{12} (a^2 + b^2) = \frac{10.8}{12} (4^2 + 6^2) = 46.8$$

$\bar{X} = 2 - 1.57 = 0.44 \text{ m}$; Distancia entre el CM del edificio y el CM de la losa (ver Figura 7.15).

$\bar{Y} = 3 - 2.35 = 0.65 \text{ m}$; Distancia entre el CM del edificio y el CM de la losa (ver Figura 7.15).

Luego, la matriz de masa de la losa con respecto al CM del edificio:

$$\underline{\underline{M}}^{losa} = \begin{bmatrix} 10.8 & 0 & -0.65 \times 10.8 \\ 0 & 10.8 & 0.44 \times 10.8 \\ -0.65 \times 10.8 & 0.44 \times 10.8 & 46.8 + 6.65 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10.8 & 0 & -7.02 \\ 0 & 10.8 & 4.752 \\ -7.02 & 4.752 & 53.45 \end{bmatrix} \quad (7.47)$$

Matriz de masa de la masa concentrada (con respecto al CM del edificio):

$\bar{X} = -1.57 \text{ m}$; Distancia entre el CM del edificio y el CM de la masa concentrada

$\bar{Y} = -2.35 \text{ m}$; Distancia entre el CM del edificio y el CM de la masa concentrada

$$\underline{\underline{M}}^{mc} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & +2.35 \times 3 \\ 0 & 3 & -1.57 \times 3 \\ 2.35 \times 3 & -1.57 \times 3 & 3 \times (-2.35^2 + -1.57^2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & +7.05 \\ 0 & 3 & -4.71 \\ +7.05 & -4.71 & 24.0 \end{bmatrix} \quad (7.48)$$

La matriz de masa total con respecto al CM del edificio, se obtiene como la suma de ambas matrices: $\underline{\underline{M}}^{losa} + \underline{\underline{M}}^{mc}$, resultando ser una matriz de masa consistente, al tener términos fuera de la diagonal. No obstante los valores fuera de la diagonal son tan pequeños que se pueden despreciar:

$$\underline{\underline{M}} = \begin{bmatrix} 13.8 & 0 & +0.03 \\ 0 & 13.8 & 0.04 \\ +0.03 & 0.04 & 77.41 \end{bmatrix} \quad (7.49)$$

Solo para clarificar conceptos, si se adiciona otra masa de igual magnitud pero en la esquina opuesta se tiene:

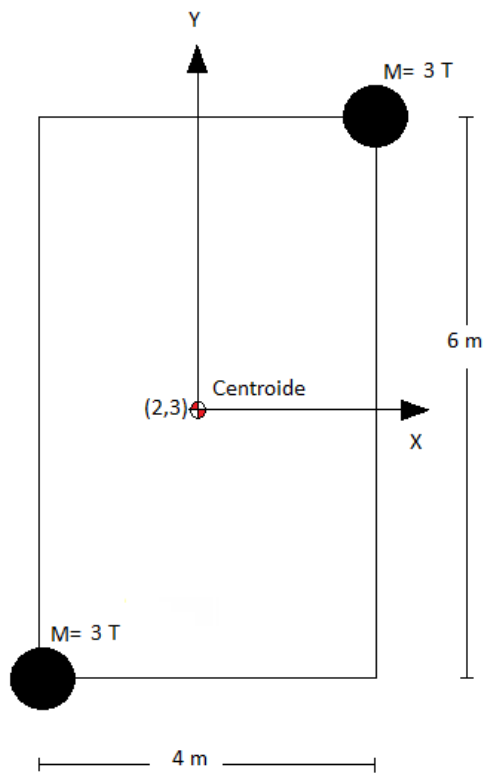


Figura 7.16.: Diafragma horizontal rígido con dos masas concentradas.

$$x_{cm} = \frac{\sum x_i m_i}{\sum m_i} = \frac{0 \times 3 + 2 \times 10.8 + 3 \times 4}{16.8} = 2 \text{ m} \quad (7.50)$$

$$y_{cm} = \frac{\sum y_i m_i}{\sum m_i} = \frac{0 \times 3 + 3 \times 10.8 + 3 \times 6}{16.8} = 3 \text{ m}$$

Matriz de masa de la losa:

$$A = 4 \times 6 = 24$$

$$m_r = \frac{10.8}{12} (4^2 + 6^2) = 46.8$$

$\bar{X} = 0 \text{ m}$; El CM de la losa coincide con el CM del edificio.

$\bar{Y} = 0 \text{ m}$; El CM de la losa coincide con el CM del edificio

Luego la matriz de masa de la losa con respecto al CM del edificio:

$$\underline{\underline{M}}^{losa} = \begin{bmatrix} 10.8 & 0 & 0 \\ 0 & 10.8 & 0 \\ 0 & 0 & 46.8 \end{bmatrix} \quad (7.51)$$

Matriz de masa de la masa concentrada inferior izquierda con respecto al CM del edificio:

$\bar{X} = -2 \text{ m}$; Distancia entre el CM del edificio y el CM de la masa concentrada

$\bar{Y} = -3 \text{ m}$; Distancia entre el CM del edificio y el CM de la masa concentrada

$$\underline{\underline{M}}^{mci} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & +3 \times 3 \\ 0 & 3 & -2 \times 3 \\ 3 \times 3 & -2 \times 3 & 3 \times (-2^2 + -3^2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & +9 \\ 0 & 3 & -6 \\ -9 & +6 & 39 \end{bmatrix} \quad (7.52)$$

Matriz de masa de la masa concentrada superior derecha con respecto al CM del edificio:

$\bar{X} = 2 \text{ m}$; Distancia entre el CM del edificio y el CM de la masa concentrada

$\bar{Y} = 3 \text{ m}$; Distancia entre el CM del edificio y el CM de la masa concentrada

$$\underline{\underline{M}}^{mcd} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \times 3 \\ 0 & 3 & +2 \times 3 \\ -3 \times 3 & 2 \times 3 & 3 \times (2^2 + 3^2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -9 \\ 0 & 3 & 6 \\ -9 & 6 & 39 \end{bmatrix} \quad (7.53)$$

Obteniéndose la matriz de masa del piso, como la suma de matrices de masa de las ecuaciones 7.51, 7.52 y 7.53:

$$\underline{\underline{M}} = \begin{bmatrix} 10.8+6 & 0 & 9-9 \\ 0 & 10.8+6 & -6+6 \\ 9-9 & -6+6 & 46.8+78 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16.8 & 0 & 0 \\ 0 & 16.8 & 0 \\ 0 & 0 & 124.8 \end{bmatrix} \quad (7.54)$$

Nótese que la masa concentrada superior compensa (o equilibra) el efecto de la masa concentrada inferior.

7.7.2 Estimación del centro de masa en estructura asimétrica

Una planta de $15 \times 25 \text{ m}^2$, está constituida por una losa hormigón armado de espesor igual a 0.10 m , la cual actúa como diafragma rígido. Los muros de corte que le dan soporte vertical y lateral, tienen una altura de 3.50 m y un espesor de 0.15 m , ver Figura 7.17.

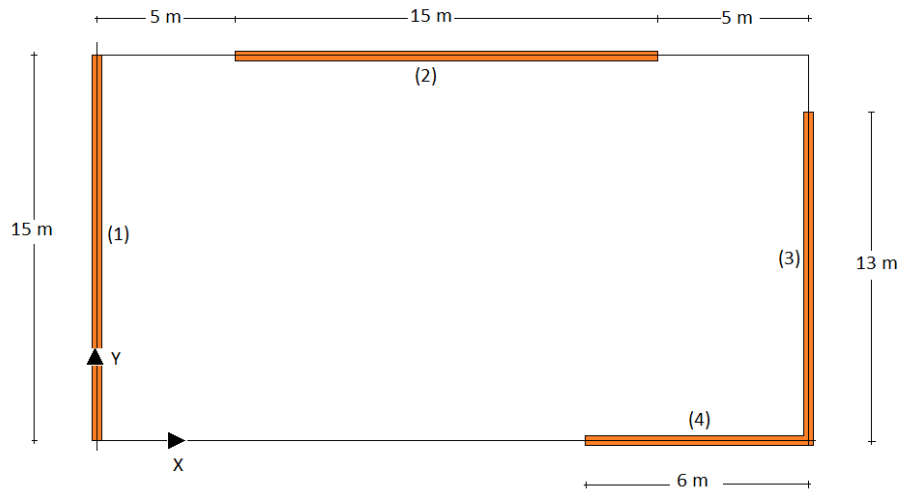


Figura 7.17.: Diafragma horizontal rígido con distribución de muros no simétrica.

Centro de masas considerando una densidad del hormigón de $\gamma = 2.5 \frac{T}{m^3}$:

Elemento	m_i	x_i	y_i	$m_i \times x_i$	$m_i \times y_i$
Muro 1	19.7	0	7.5	0	147.8
Muro 2	19.7	12.5	15	246.3	295.5
Muro 3	17.1	25	6.5	427.5	111.2
Muro 4	7.8	22	0	171.6	0
Losa	93.8	12.5	7.5	1172.5	703.5
Σ	158.1			2017.9	1258
				$x_{cm} = 12.8$	
					$y_{cm} = 8.0$

Tabla 7.3: Cálculo del centro de masas de la planta dada.

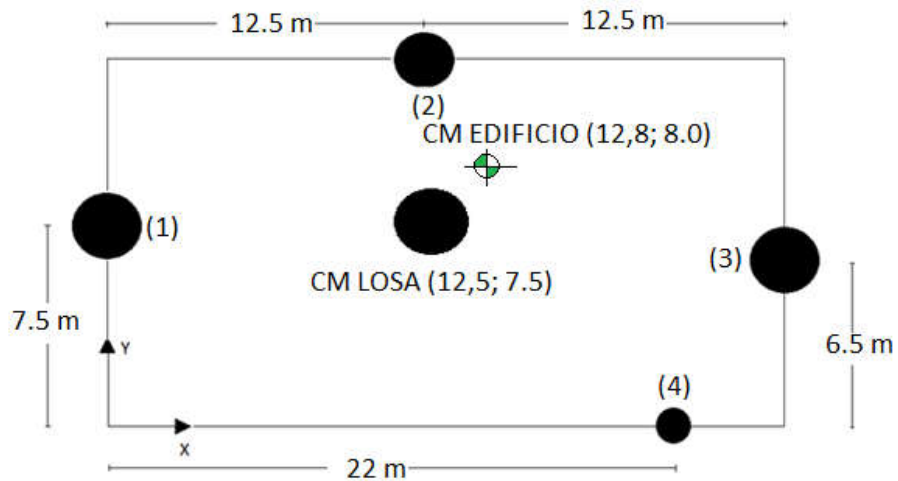


Figura 7.18.: Posición de las masas concentradas.

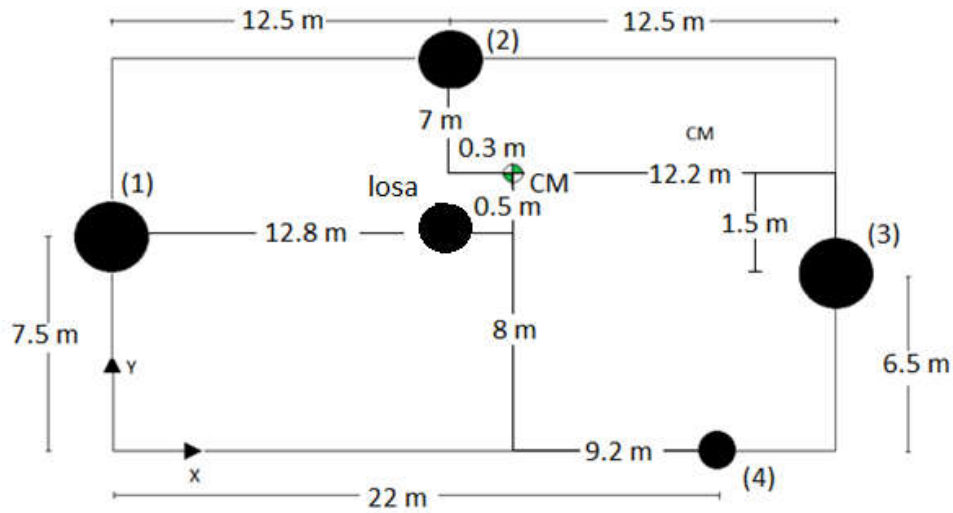


Figura 7.19.: Distancias con respecto al CM de la planta de los diferentes CM.

$$M_{losa} = 2.5 \frac{T}{m^3} \times (15 \times 25 \times 0.10) m^3 = 93.8 T$$

Masa rotacional de la placa:

$$A = 15 \times 25 = 375$$

$$m_r = \frac{93.8}{12} (15^2 + 25^2) = 6644.2$$

$$\bar{X} = -0.3 m$$

$$\bar{Y} = -0.5 m$$

Matriz de masa de la losa con respecto al CM del edificio:

$$\underline{\underline{M^I}} = \begin{bmatrix} 93.8 & 0 & +0.5 \times 93.8 \\ 0 & 93.8 & -0.3 \times 93.8 \\ 0.5 \times 93.8 & -0.3 \times 93.8 & 6644.2 + 93.8 \times (-0.3^2 + -0.5^2) \end{bmatrix} \quad (7.55)$$

$$\underline{\underline{M^I}} = \begin{bmatrix} 93.8 & 0 & 46.9 \\ 0 & 93.8 & -28.14 \\ 46.9 & -28.14 & 6676.1 \end{bmatrix} \quad (7.56)$$

Matriz de masa del muro 1 con respecto al CM:

$\bar{X} = -12.8 \text{ m}$ (Distancia entre el origen y el CM del muro 1)

$\bar{Y} = -0.5 \text{ m}$ (Distancia entre el origen y el CM del muro 1)

$$\underline{\underline{M^1}} = \begin{bmatrix} 19.7 & 0 & +0.5 \times 19.7 \\ 0 & 19.7 & -12.8 \times 19.7 \\ 0.5 \times 19.7 & -12.8 \times 19.7 & 19.7 \times (-12.8^2 + -0.5^2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19.7 & 0 & +9.85 \\ 0 & 19.7 & -252.2 \\ 9.85 & -252.2 & 3232.6 \end{bmatrix} \quad (7.57)$$

Matriz de masa del muro 2 con respecto al CM:

$\bar{X} = -0.3 \text{ m}$ (Distancia entre el origen y el CM del muro 2)

$\bar{Y} = 7 \text{ m}$ (Distancia entre el origen y el CM del muro 2)

$$\underline{\underline{M^2}} = \begin{bmatrix} 19.7 & 0 & -7 \times 19.7 \\ 0 & 19.7 & -0.3 \times 19.7 \\ -7 \times 19.7 & -0.3 \times 19.7 & 19.7 \times (7^2 + -0.3^2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19.7 & 0 & -137.9 \\ 0 & 19.7 & -5.91 \\ -137.9 & -5.91 & 967.07 \end{bmatrix} \quad (7.58)$$

Matriz de masa del muro 3 con respecto al CM:

$\bar{X} = 12.2 \text{ m}$ (Distancia entre el origen y el CM del muro 3)

$\bar{Y} = -1.5 \text{ m}$ (Distancia entre el origen y el CM del muro 3)

$$\underline{\underline{M}}^3 = \begin{bmatrix} 17.1 & 0 & +1.5 \times 17.1 \\ 0 & 17.1 & +12.2 \times 17.1 \\ 1.5 \times 17.1 & +12.2 \times 17.1 & 17.1 \times (12.2^2 + -1.5^2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17.1 & 0 & +25.65 \\ 0 & 17.1 & +208.62 \\ +25.65 & +208.62 & 2583.64 \end{bmatrix} \quad (7.59)$$

Matriz de masa del muro 4 con respecto al CM:

$\bar{X} = 9.2 \text{ m}$ (Distancia entre el origen y el CM del muro 4)

$\bar{Y} = -8.0 \text{ m}$ (Distancia entre el origen y el CM del muro 4)

$$\underline{\underline{M}}^4 = \begin{bmatrix} 7.8 & 0 & +8.0 \times 7.8 \\ 0 & 7.8 & +9.2 \times 7.8 \\ 8.0 \times 7.8 & +9.2 \times 7.8 & 7.8 \times (12.2^2 + -1.5^2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.8 & 0 & +62.4 \\ 0 & 7.8 & +71.76 \\ +62.4 & +71.76 & 1178.5 \end{bmatrix} \quad (7.60)$$

La matriz de masa total, se obtiene como la contribución de cada una de las respectivas matrices:

$$\underline{\underline{M}} = \begin{bmatrix} 158.1 & 0 & +6.9 \\ 0 & 158.1 & -5.87 \\ +6.9 & -5.87 & 14684.7 \end{bmatrix} \quad (7.61)$$

Nótese que la matriz es casi diagonal, pues los términos fuera de ella son despreciables con respecto a la magnitud de los términos ubicados en la diagonal.

7.7.3 Propiedades dinámicas de edificio de dos pisos

Para el edificio de dos pisos de la Figura 7.20 se pide definir las respectivas frecuencias y modos de vibrar, considerando que existe a nivel de cada piso un diafragma rígido. Considere que la masa concentrada del primer y segundo nivel valen 120 kips y 60 kips respectivamente. (Ejemplo 13.13, Capítulo 13, Sec. 13.9 del libro “Dynamics of Structures. Theory and Applications to Earthquake Engineering”. Anil K. Chopra).

Recordemos que el análisis seudo tridimensional consiste en separar y analizar en forma independiente cada una de las líneas resistentes verticales y obtener sus respectivas matrices de rigidez, para luego llevar estas rigideces en coordenadas de líneas a coordenadas globales asumiendo la existencia de un diafragma rígido horizontal en cada nivel de piso, que vincula los desplazamientos de todas las líneas (trazas).

Las matrices de rigidez de cada uno de los marcos se conocen y sus valores son:

$$\underline{\underline{K}}^A = \begin{bmatrix} 225 & -75 \\ -75 & 75 \end{bmatrix}; \quad \underline{\underline{K}}^B = \underline{\underline{K}}^C = \begin{bmatrix} 120 & -40 \\ -40 & 40 \end{bmatrix} \quad (7.62)$$

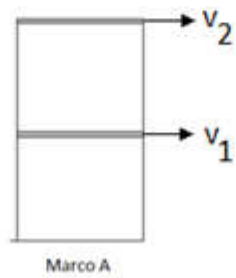
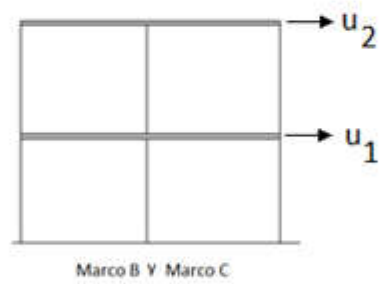
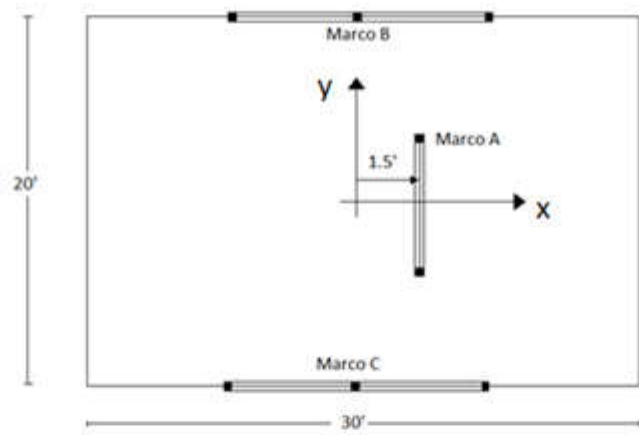


Figura 7.20.: Edificio de dos pisos con diafragma rígido.

Aplicando la ecuación (7.9) se obtiene la matriz de rigidez horizontal de la estructura:

$$\underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{K}}^B \sin^2(90) + \underline{\underline{K}}^C \sin^2(270) & 0 & -\underline{\underline{K}}^B 10 \sin(90) - \underline{\underline{K}}^C 10 \sin(270) \\ \text{sim} & \underline{\underline{K}}^A \cos^2(0) & \underline{\underline{K}}^A 1.5 \cos(0) \\ \text{sim} & \text{sim} & \underline{\underline{K}}^A (1.5)^2 + \underline{\underline{K}}^B (10)^2 + \underline{\underline{K}}^C (10)^2 \end{bmatrix} \quad (7.62)$$

$$\underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix} 240 & -80 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -80 & +80 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 225 & -75 & 337.5 & -112.5 \\ 0 & 0 & -75 & +75 & -112.5 & +112.5 \\ 0 & 0 & 337.5 & -112.5 & 24506 & -8169 \\ 0 & 0 & -112.5 & +112.5 & -8169 & +8169 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ v_1 \\ v_2 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{matrix}$$

La matriz de masa concentrada de la estructura, suponiendo masas uniformemente distribuidas $m_1 = \frac{120}{g} = 3.727 \text{ kip-s}^2 / \text{ft}$ y $m_2 = \frac{60}{g} = 1.863 \text{ kip-s}^2 / \text{ft}$, vale:

$$\underline{\underline{M}} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{m_1}{A} J_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{m_2}{A} J_0 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ v_1 \\ v_2 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{matrix} \quad (7.63)$$

(7.64)

$$\underline{\underline{M}} = \begin{bmatrix} 3.727 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.863 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3.727 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.863 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 403.7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 201.9 \end{bmatrix}$$

Resolviendo el problema característico, se tiene:

$$|\underline{\underline{K}} - \omega^2 \underline{\underline{M}}| = 0 \Rightarrow [V, D] = eig(\underline{\underline{K}}, \underline{\underline{M}}) \quad (7.65)$$

$$\underline{\underline{\Omega}}^2 = \begin{bmatrix} 4.168^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4.633^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4.794^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8.316^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9.266^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9.606^2 \end{bmatrix} \quad (7.66)$$

De la matriz modal $\underline{\underline{\Phi}}$ se deduce que el segundo y quinto modo son modos puramente traslacionales en el eje X. Los restantes modos: 1, 3, 4 y 6 tienen componentes rotacionales y traslacionales asociadas al eje Y producto de la excentricidad del marco A.

$$\underline{\underline{\Phi}} = \begin{bmatrix} 0 & +0.500 & 0 & 0 & +0.9996 & 0 \\ 0 & +1.000 & 0 & 0 & -1.0000 & 0 \\ +0.5005 & 0 & +0.5006 & -0.9999 & 0 & -0.9998 \\ +1.0000 & 0 & +1.0000 & +1.0000 & 0 & +1.0000 \\ -0.0457 & 0 & +0.0472 & +0.0937 & 0 & -0.0976 \\ -0.0911 & 0 & +0.0948 & -0.0943 & 0 & +0.0972 \end{bmatrix} \quad (7.67)$$

En dónde;

$$\underline{\underline{\Phi}}_j = \begin{bmatrix} \Phi_{1j} : \text{mov. relativo asociado a } u_1 \\ \Phi_{2j} : \text{mov. relativo asociado a } u_2 \\ \Phi_{3j} : \text{mov. relativo asociado a } v_1 \\ \Phi_{4j} : \text{mov. relativo asociado a } v_2 \\ \Phi_{5j} : \text{mov. relativo asociado a } \theta_1 \\ \Phi_{6j} : \text{mov. relativo asociado a } \theta_2 \end{bmatrix} \quad (7.68)$$

Dibujando los respectivos modos de vibrar, se tiene (Figura 7.21):

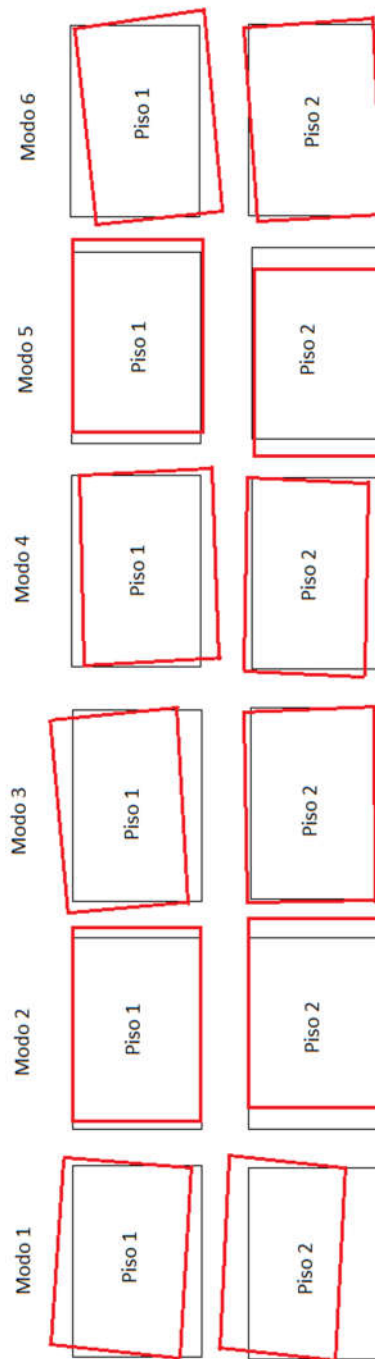


Figura 7.21.: Modos de vibrar de edificio (ver figura 7.20) de dos niveles.

Modo	frecuencia $\frac{rad}{s}$	Periodo s	Dirección
1	4.168	$T_{Y_1} = 1.51$	Y+giro
2	4.633	$T_{X_1} = 1.36$	X
3	4.794	$T_{Y_2} = 1.31$	Y+giro
4	8.136	$T_{Y_3} = 0.77$	Y+giro
5	9.266	$T_{X_2} = 0.68$	X
6	9.606	$T_{Y_4} = 0.65$	Y+giro

Tabla 7.4: Periodos de vibrar.

En el primer modo, ambos pisos se desplazan positivamente en la dirección del eje vertical ($\Phi_{13}=0.500$; $\Phi_{14}=1.000$) y rotan en el sentido horario ($\Phi_{15}=-0.0457$; $\Phi_{16}=-0.0911$; giro negativo), sin movimiento sobre el eje horizontal ($\Phi_{11} = \Phi_{12} = 0$).

El segundo modo es puramente traslacional en el eje horizontal ($\Phi_{21}=0.500$; $\Phi_{22}=1.000$), sin rotación ni movimiento sobre el eje vertical ($\Phi_{23} = \Phi_{24} = \Phi_{25} = \Phi_{26} = 0$), nótese que la amplitud del movimiento del primer piso es menor a la amplitud del movimiento de segundo nivel.

El tercer modo es traslacional en el eje vertical con ambos movimientos en la dirección positiva de este eje ($\Phi_{33}=0.500$; $\Phi_{43}=1.000$) y se acopla con rotaciones de

ambos diafragmas ($\Phi_{53}=0.0472$; $\Phi_{63}=0.0948$) en el sentido anti-horario (es decir, giros positivos).

En el cuarto modo el diafragma del primer piso, se mueve en el sentido negativo del eje vertical y rota en sentido anti-horario, en cambio, el segundo piso se desplaza hacia arriba y rota en sentido horario. El quinto modo nuevamente es puramente traslacional en el eje horizontal.

CAPITULO 8

SISTEMAS GENERALIZADOS

8.1 Introducción

Este tipo de estructuras se caracteriza por tener infinitos grados de libertad siendo muy difícil visualizar puntos en donde puedan definirse concentraciones de masa, ejemplos de este tipo de estructuras son chimeneas, torres, etc. Sin embargo, es posible realizar un análisis como si fuera un sistema con un solo grado de libertad siempre que se suponga que solo una curva de deformación puede producirse durante el movimiento, esto es, suponiendo que el conocimiento del desplazamiento de un solo punto del sistema determina el desplazamiento del sistema total (Paz, 1992).

8.2 Propiedades y características dinámicas

Las propiedades dinámicas que caracterizan a este tipo de estructuras son una masa distribuida $m(x)$ y una rigidez flexional distribuida $EI(x)$, figura 8.1.

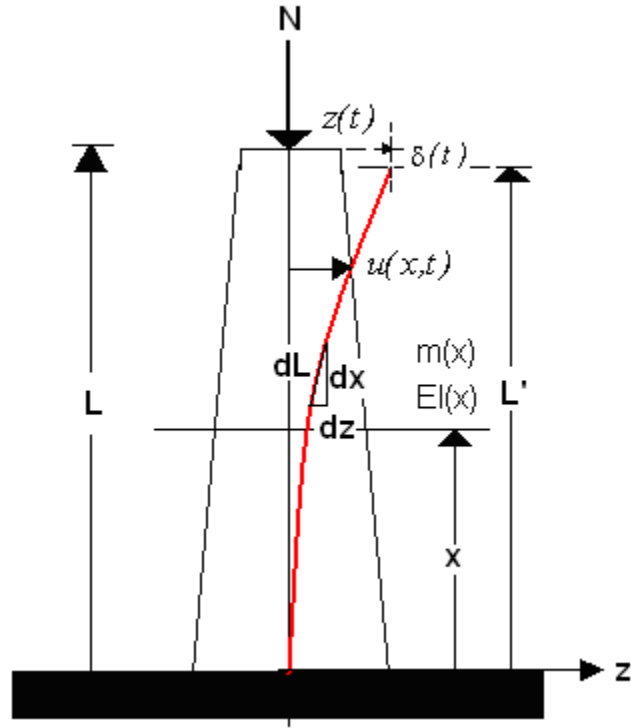


Figura 8.1 Estructuras con masa y elasticidad distribuida

Consideremos la fuerza de inercia que se genera cuando existe una aceleración en la base:

$$f_I(x,t) = -m(x) \cdot \ddot{u}(x,t) \quad (8.1)$$

$$f_I(x,t) = -m(x) \cdot [\ddot{u}(x,t) + \ddot{u}_g(t)] \quad (8.2)$$

Utilizando el principio de los desplazamientos virtuales, el cual establece que el trabajo virtual de un campo de tensiones estáticamente admisible, sobre un campo de

desplazamientos virtuales cinematicamente admisibles, es igual el trabajo virtual que realizan las fuerzas externas.

Considerando únicamente la acción de la fuerza de inercia, se tiene:

$$\delta W_{int.} = \delta W_{ext.} \quad (8.3)$$

Donde:

$$\delta W_{ext} = \int_0^L f_I(x, t) \cdot \delta u(x) dx \quad (8.4)$$

$$\delta W_{ext} = \int_0^L [-m(x) \cdot (\ddot{u}(x, t) + \ddot{u}_g(t))] \cdot \delta u(x) dx \quad (8.5)$$

$$\delta W_{int.} = \int_0^L M(x, t) \cdot \delta k(x, t) dx \quad (8.6)$$

Con la curvatura, definida por:

$$k(x, t) = \frac{d^2 u(x, t)}{dx^2} = -\frac{M(x, t)}{(EI)} \quad (8.7)$$

Siendo $M(x, t)$ el momento flector uniformemente distribuido por unidad de longitud y tiempo, y $\delta k(x, t)$ la curvatura virtual del elemento. Evaluando las derivadas espaciales y temporales de la función de aproximación de la respuesta:

$$u(x, t) = \varphi(x) \cdot z(t) \text{ y } \delta u(x, t) = \varphi(x) \cdot \delta z(t) \quad (8.8)$$

Siendo:

$\varphi(x)$: Función de forma que satisface las condiciones de contorno del problema y que se define a partir de la configuración deformada. En el caso particular de la Figura 8.1, $\varphi(x=0) = 0$ y $\varphi'(x=0) = 0$ (condición de empotramiento en la base).

$z(t)$: Coordenada generalizada correspondiente al desplazamiento del extremo libre del elemento.

La derivada espacial:

$$k(x,t) = \frac{d^2 u(x,t)}{dx^2} = -\frac{M(x,t)}{(EI)} = \varphi''(x) \cdot z(t) \quad (8.9)$$

$$\delta k(x,t) = \varphi''(x) \cdot \delta z(t) \quad (8.10)$$

La derivada temporal:

$$\ddot{u}(x,t) = \varphi(x) \cdot \ddot{z}(t) \quad (8.11)$$

Reemplazando en ecuaciones (8.5) y (8.6):

$$\delta W_{ext} = \int_0^L \left[-m(x) \cdot [\varphi(x) \cdot \ddot{z}(t) + \ddot{u}_g(t)] \right] \cdot [\varphi(x) \cdot \delta z(t)] dx \quad (8.12)$$

$$\delta W_{ext} = -\delta z(t) \cdot \left[\ddot{z}(t) \cdot \int_0^L m(x) \cdot \varphi^2(x) \cdot dx + \ddot{u}_g(t) \cdot \int_0^L m(x) \cdot \varphi(x) \cdot dx \right] \quad (8.13)$$

$$\begin{aligned} \delta W_{\text{int}} = & -\delta z(t) \cdot \left[\int_0^L [EI(x) \cdot k(x)] \cdot \delta k(x, t) \cdot dx \right] = \\ & -\delta z(t) \cdot \left[z(t) \cdot \int_0^L EI(x) \cdot [\varphi''(x)]^2 dx \right] \end{aligned} \quad (8.14)$$

Igualando (8.13) y (8.14) (principio de los desplazamientos virtuales), se tiene:

$$\begin{aligned} & -\delta z(t) \cdot \left[\ddot{z}(t) \cdot \int_0^L m(x) \cdot \varphi^2(x) \cdot dx + \ddot{u}_g(t) \cdot \int_0^L m(x) \cdot \varphi(x) \cdot dx \right] = \\ & -\delta z(t) \cdot \left[z(t) \cdot \int_0^L EI(x) \cdot [\varphi''(x)]^2 dx \right] \end{aligned} \quad (8.15)$$

$$\bar{m} \cdot \ddot{z}(t) + \bar{k} \cdot z(t) = -\bar{L} \cdot \ddot{u}_g(t) \quad (8.16)$$

Con los siguientes parámetros generalizados (masa, rigidez):

$$\bar{m} = \int_0^L m(x) \cdot [\varphi(x)]^2 dx \quad (8.17)$$

$$\bar{k} = \int_0^L EI(x) \cdot [\varphi''(x)]^2 dx \quad (8.18)$$

$$\bar{L} = \int_0^L m(x) \cdot \varphi(x) dx \quad (8.19)$$

Dividiendo (8.16) por la masa generalizada:

$$\ddot{z}(t) + \omega_n^2 \cdot z(t) = -\frac{\bar{L}}{\bar{m}} \cdot \ddot{u}_g(t) = -\bar{\Gamma} \cdot \ddot{u}_g(t) \quad (8.20)$$

En donde, se define el coeficiente de **Rayleigh**, que corresponde a la frecuencia fundamental en un sistema con masa y elasticidad distribuida:

$$\omega_n^2 = \frac{\int_0^L EI(x) \cdot [\varphi''(x)]^2 dx}{\int_0^L m(x) \cdot [\varphi(x)]^2 dx} \quad (8.21)$$

Las fuerzas internas (momentos flectores y cortes) se calculan por análisis estático en analogía con una viga con carga uniformemente distribuida:

$$\frac{dM(x)}{dx} = V(x) \Rightarrow \frac{dV(x)}{dx} = q(x) \quad (8.22)$$

La fuerza de corte a lo largo del sistema, se evalúa por:

$$f_s(x, t) = \frac{d^2 M(x)}{dx^2} = q(x) = [M(x)]'' = [EI(x) \cdot u''(x, t)]'' \quad (8.23)$$

De ecuación (8.7) $\frac{d^2 u(x, t)}{dx^2} = u''(x, t) = \varphi''(x) \cdot z(t)$, reemplazando en (8.23):

$$f_s(x, t) = [M(x)]'' = [EI(x) \cdot \varphi''(x)]'' \cdot z(t) \quad (8.24)$$

Fuerzas que dependen de las derivadas de las funciones de forma. Puesto que las derivadas son de cuarto orden, las funciones de formas resultan menos precisas que los desplazamientos.

Con respecto a la respuesta sísmica máxima, esta se puede calcular a partir de:

$$z^{max} = \bar{\Gamma} \cdot S_D = \bar{\Gamma} \cdot \left[\frac{S_A}{\omega_n^2} \right] \quad (8.25)$$

$$u^{max} = \varphi(x) \cdot z^{max} = \varphi(x) \cdot \bar{\Gamma} \cdot S_D \quad (8.26)$$

$$f_s^{max}(x, t) = \bar{k} \cdot u^{max} = \omega_n^2 \cdot \bar{m}(x) \cdot \left[\varphi(x) \cdot \bar{\Gamma} \cdot S_D \right] = \bar{m}(x) \cdot \varphi(x) \cdot \bar{\Gamma} \cdot S_A \quad (8.27)$$

En el caso de existir una fuerza dinámica $\bar{p}(t)$ aplicada, el trabajo de la fuerza vale:

$$\delta W_{ext} = \int_0^L [p(x, t)] \cdot [\varphi(x) \cdot \delta z(t)] dx \quad (8.28)$$

Obteniéndose la siguiente ecuación de movimiento vale:

$$\bar{m}(x) \cdot \ddot{z}(t) + \bar{k} \cdot z(t) = \bar{p}(t) \quad (8.29)$$

En donde la fuerza generalizada se define por:

$$\bar{p}(t) = \int_0^L p(x, t) \cdot \varphi(x) dx \quad (8.30)$$

Considerando ahora el trabajo que realiza el peso de la estructura o una carga axial aplicada **N**, es posible determinar la influencia que dicha acción tiene sobre la rigidez flexional.

Para ello es necesario calcular la componente vertical del movimiento $\delta(t)$ del extremo libre (Figura 8.1) para estimar la rigidez geométrica generalizada y calcular la rigidez generalizada efectiva del sistema (Paz, 1992).

$$\bar{k}_G^* = N \cdot \int_0^L \left[\frac{d\phi}{dx} \right]^2 dx \quad (8.31)$$

En consecuencia, la rigidez generalizada efectiva del sistema, está dada por:

$$\bar{K}_{efe} = \bar{k} - \bar{k}_G^* \quad (8.32)$$

$$\bar{m}(x) \cdot \ddot{z}(t) + \bar{K}_{efe} \cdot z(t) = \bar{p}(t) \quad (8.33)$$

8.3 Método de Rayleigh

En general la deformada (curva elástica) en estructuras continuas y discretas de múltiples grados de libertad, puede ser elegida arbitrariamente (con la condición que satisfaga las condiciones de contorno) y dependiendo de cuan cercana este de la deformada real se tendrán mejores o peores resultados, en la estimación de la frecuencia fundamental. Dado que el sistema es conservativo, se tiene que cuando la energía cinética es máxima la energía potencial es nula (es decir, cuando el sistema pasa por el origen) y viceversa, es decir, cuando se produce el cambio de dirección del péndulo, el desplazamiento es máximo y la velocidad nula (energía potencial máxima y energía cinética nula). Es decir, la energía total del sistema es la misma en ambas situaciones.

Por ejemplo considérese el cálculo de la frecuencia fundamental en el sistema de la Figura 8.2, la energía potencial, en este caso, es igual al trabajo realizado por las

fuerzas de inercia asociado a cada una de las masas $W_j = m_j \cdot g$ con las que el sistema se discretizo:

$$W_{ext} = E_{pot}^{max} = \frac{1}{2} W_1 y_1 + \frac{1}{2} W_2 y_2 + \dots + \frac{1}{2} W_n y_n \quad (8.34)$$

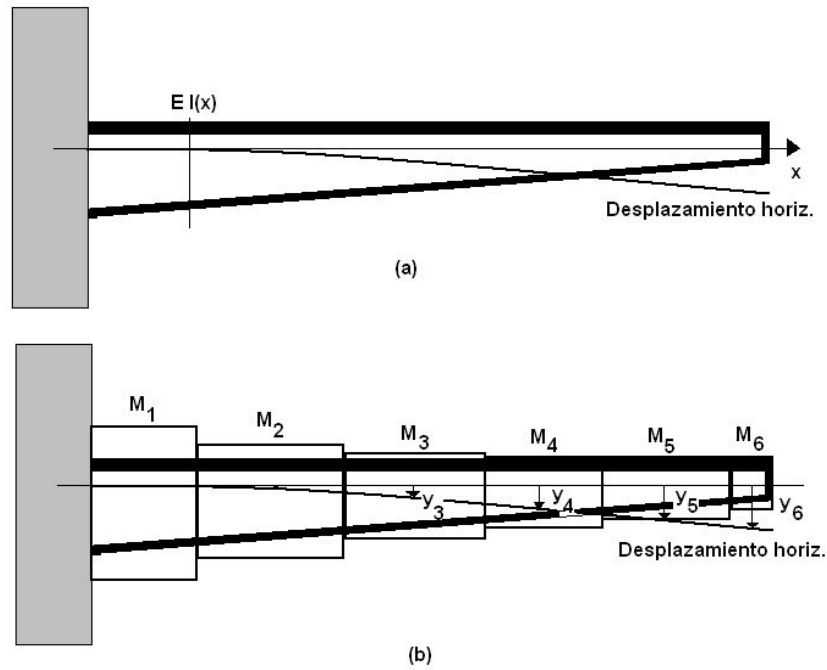


Figura 8.2. Estructura real y modelo discretizado

Para un movimiento armónico, las velocidades máximas son proporcionales al desplazamiento máximo por la frecuencia ($\omega \cdot y_i$). Por lo tanto el valor de la energía cinética máxima sería:

$$E_{cin}^{max} = \frac{1}{2} \frac{W_1}{g} (\omega y_1)^2 + \frac{1}{2} \frac{W_2}{g} (\omega y_2)^2 + \dots + \frac{1}{2} \frac{W_n}{g} (\omega y_n)^2 \quad (8.35)$$

Puesto que la energía se conserva existe igualdad la energía potencial máxima y cinética, aunque ocurran en instantes diferentes (energía potencial máxima cuando el desplazamiento es máximo ($\dot{y} = 0$) y energía cinética máxima cuando la velocidad es máxima ($y = 0$)).

$$E_{cin}^{max} = E_{pot}^{max} \quad (8.36)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g(W_1 y_1 + W_2 y_2 + \dots + W_n y_n)}{W_1 y_1^2 + W_2 y_2^2 + \dots + W_n y^2}} = \sqrt{\frac{g \sum_{i=1}^n W_i y_i}{\sum_{i=1}^n W_i y_i^2}} \quad (8.37)$$

Que corresponde a la ecuación de Rayleigh, para determinar la frecuencia fundamental en un sistema con masas distribuidas.

8.4 Ejemplo de aplicación

Una chimenea de hormigón ($E = 20.000 \text{ MPa}$) de 31 m de altura y sección circular tubular, se encuentra inicialmente en reposo. Se desea analizar el comportamiento de dicha estructura cuando se somete a un espectro de aceleraciones definido por ($g=9.8$

$\frac{m}{s^2}$ y $\xi = 5\%$), ver figura 8.3:

$$S_a(T, \xi = 5\%) = (2 \cdot T + 0.2) \cdot g, \text{ si } 0 \leq T \leq 0.1 \quad (8.38)$$

$$S_a(T, \xi = 5\%) = 0.4 \cdot g, \text{ si } 0.1 \leq T \leq 0.3$$

$$S_a(T, \xi = 5\%) = (0.475 - 0.25 \cdot T) \cdot g, \text{ si } T \geq 0.3$$

La estructura puede considerarse con paredes de espesor uniforme de 10 cm. y un radio exterior de 80 cm. La masa por unidad de longitud es constante y vale $2500 \frac{kg}{m}$.

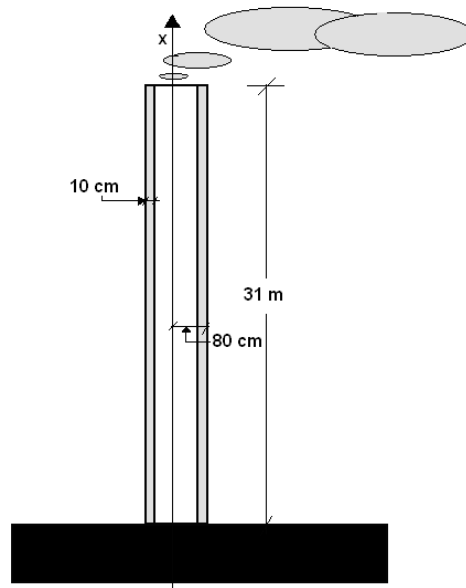


Figura 8.3 Chimenea

Se pide responder a las siguientes preguntas cuando se considera una función de forma

igual a $\Psi(x) = \frac{x^2}{L^2}$ para describir el movimiento:

- Definir la ecuación de movimiento del sistema.
- Estimar el periodo fundamental utilizando el coeficiente de Rayleigh.
- Estimar el desplazamiento del extremo libre $u(x = 31, t)$ m para la excitación definida por el espectro de aceleraciones.

- Dibuje la distribución de fuerzas estáticas equivalentes que actúan sobre la estructura, cuando se somete a la excitación definida por el espectro de aceleraciones.

Propiedades del sistema:

(8.39)

$$A = \pi \cdot (0.8^2 - 0.7^2) = 0.471 \text{ m}^2$$

$$I_0 = \frac{\pi}{4} \cdot (1.6^4 - 1.4^4) = 2.13 \text{ m}^4$$

Funcion de forma elegida:

(8.40)

$$\psi(x) = \frac{x^2}{L^2} \Rightarrow \psi'(x) = \frac{2x}{L^2} \Rightarrow \psi''(x) = \frac{2}{L^2}$$

Propiedades generalizadas:

(8.41)

$$\bar{m} = \int_0^L m(x) [\psi(x)]^2 dx = m \int_0^L \left[\frac{x^2}{L^2} \right]^2 dx = \frac{mx^5}{5L^4} \Big|_0^L = \frac{mL}{5} = 15500 \text{ [Kg]}$$

(8.42)

$$\bar{k} = \int_0^L EI(x) [\psi''(x)]^2 dx = EI \int_0^L \left[\frac{2}{L^2} \right]^2 dx = \frac{4EIx}{L^4} \Big|_0^L = \frac{4EI}{L^3} = 5.719 \cdot 10^6 \text{ [N/m]}$$

$$\bar{L} = \int_0^L m(x) \psi(x) dx = m \int_0^L \frac{x^2}{L^2} dx = \frac{mx^3}{3L^2} \Big|_0^L = \frac{mL}{3} = 25833.3 \text{ [Kg]} \quad (8.43)$$

La ecuación de movimiento en función de las propiedades generalizadas es:

$$\bar{m} \cdot \ddot{z}(t) + \bar{k} \cdot z(t) = -\bar{L} \cdot \ddot{u}_g \quad (8.44)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} z(t) + 368.97 z(t) = -1.67 \cdot \frac{d^2 u_g}{dt^2} \quad (8.45)$$

Estimación de la frecuencia del sistema utilizando el coeficiente de Rayleigh:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{\bar{k}}{\bar{m}}} = \sqrt{\frac{20EI}{mL^4}} = 19.21 \text{ [rad / s]} \quad (8.46)$$

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = 0.33 \text{ s}$$

De ecuación (8.38) para el periodo obtenido, se obtiene $S_a = 3.864 \frac{m}{s^2}$ y

$$S_d = \frac{S_a}{\omega_n^2} = 0.0104 \text{ m}$$

. Luego el desplazamiento máximo del extremo libre se obtiene como:

(8.47)

$$z_{\max} = \Gamma \cdot S_d = 1.67 \cdot 0.0104 = 0.0174 \text{ m}$$

Además se sabe que:

(8.48)

$$u(x, t) = \frac{x^2}{L^2} z_{\max} = 1.81 \cdot 10^{-5} x^2 \text{ [m]}$$

$$\text{Así: } u(31, t) = u_{\max} = 0.0174 \text{ [m]}$$

La distribución de fuerzas estáticas se determina como:

(8.49)

$$F(x) = [\omega^2 \cdot m(x)] \cdot u(x, t) = 16.69 x^2 \text{ [N]}$$

REFERENCIAS

[B-1]: BARBAT, Alex H. (1983) “Calculo sísmico de las estructuras”, Editores técnicos asociados, S.A., Barcelona. España

[B-2]: BARBAT, Alex H. y MIQUEL J. (1994) “Estructuras sometidas a acciones sísmicas”, CIMNE, Barcelona. España

[CH-1]: CHOPRA, Anil K. (1995) “Dynamics of Structures”, theory and applications to earthquake engineering, University of California at Berkeley, Editorial Prentice Hall, New Jersey.

[C-1]: CLOUGH, Ray W. y PENZIEN, Joseph (1982) “Dynamics of Structures”, edition 5ª, International Student Edition, McGraw-Hill International Book Company.

[P-1]: PAZ, Mario. (1992) “Dinámica Estructural”, Teoría y Calculo, Editorial Reverte S.A., Barcelona. España.

[F-1]: FEMA 451 <http://www.bssconline.org/FEMA451B/451Bchapters.htm>