



Facultad de Ingeniería Agrícola
Universidad de Concepción

GUÍAS DE PRÁCTICO MATRICES, DETERMINANTES Y SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Autores

Juan Carlos Sandoval Avendaño
Adan Edgardo Flores Opazo
María Teresa Gálvez Flores



Edición Enero 2026

**GUIAS DE PRÁCTICO MATRICES, DETERMINANTES Y SISTEMAS DE ECUACIONES
LINEALES**

**JUAN CARLOS SANDOVAL AVENDAÑO
ADÁN EDGARDO FLORES OPAZO
MARÍA TERESA GÁLVEZ FLORES**

**Registro de Propiedad Intelectual N° 2026-P-8951
ISBN: 978-956-9280-67-2**

**Prohibida la reproducción total o parcial de esta obra
©UNIVERSIDAD DE CONCEPCION**

ÍNDICE

	PÁG.
GUÍA DE PRÁCTICO N° 1 MATRICES	4
GUÍA DE PRÁCTICO N° 2 DETERMINANTES	82
GUÍA DE PRÁCTICO N° 3 SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES	126
GUÍA DE PRÁCTICO N° 4 VALORES Y VECTORES PROPIOS DE UNA MATRIZ	181
GUÍA DE PRÁCTICO N° 5 APLICACIONES	202
BIBLIOGRAFÍA	240

GUÍA DE PRÁCTICO N°1

MATRICES

Teoría Matrices

T 1 Una *matriz* es un arreglo, distribución, acomodación o disposición rectangular de elementos ubicados en filas y en columnas.

En la definición anterior ¿qué significa arreglo rectangular?. Significa que los elementos, habitualmente números, los disponemos o acomodamos en filas y columnas.

Por ejemplo, si tenemos los siguientes cuatro números : 1, 3, -1 y 6 los podemos acomodar así:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$$

generando lo que se conoce como *matriz cuadrada* (igual número de filas que de columnas) de orden, tamaño o dimensión 2 (tenemos 2 filas y 2 columnas). Las filas son las horizontales y las columnas son las verticales.

También podríamos haber usado las siguientes estructuras, donde los números en la parte inferior conforman el *orden* (número de filas $\times$ número de columnas).

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}_{4 \times 1} \quad \text{ó} \quad (1 \ 3 \ -1 \ 6)_{1 \times 4}$$

Notemos que la secuencia en que disponemos los números también genera nuevas matrices. Por ejemplo, $\begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ es una matriz de orden 2 distinta a la matriz $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$.

T 2 El *orden, tamaño o dimensión* de una matriz es el número de filas por el número de columnas y se escribe $m \times n$ indicando que la matriz posee m filas y n columnas, y se dice matriz bidimensional o arreglo bidimensional.

Si $m = n$, entonces la matriz se dice *cuadrada*; en caso contrario se habla habitualmente de matriz *rectangular*.

Si $m = 1$, la matriz se llama matriz fila y si $n = 1$, matriz columna. En ambos casos, se habla de matriz unidimensional o arreglo unidimensional.

T 3 Los elementos de una matriz pueden ser números reales o complejos.

Es común denotar las matrices con letras mayúsculas, A, B, I , etc., y sus elementos con letras minúsculas a las que se le añaden dos subíndices, por ejemplo, a_{ij} , b_{kt} , etc.

Los subíndices sirven para especificar la ubicación del elemento en la matriz, por ejemplo, a_{14} denota el elemento que está en la fila 1 y en la columna 4; en general, a_{ij} representará el elemento que está en la fila i y en la columna j .

Si queremos escribir en forma general una matriz que consta de 2 filas y 2 columnas lo hacemos de la siguiente manera :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

que se puede abreviar $A = (a_{ij})_{2 \times 2}$, o en forma compacta $A = (a_{ij})_2$, o sin indicar el número de filas y de columnas $A = (a_{ij})$

Una matriz general de orden $m \times n$ se escribe como:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Notemos que al escribir las matrices anteriores hemos usado indistintamente los paréntesis redondos $()$ o cuadrados $[\]$ para encerrar los elementos de una matriz.

T 4 En una matriz cuadrada $A = (a_{ij})_n$ los elementos de la *diagonal principal* son aquellos que tienen la forma a_{ii} , con $i = 1, 2, \dots, n$; y los elementos de la *diagonal secundaria* son aquellos que tienen la forma $a_{i \ n+1-i}$, con $i = 1, 2, \dots, n$. Los elementos que no están en la diagonal principal se denominan *elementos extradiagonales* y son aquellos que tienen la forma a_{ij} con $i \neq j$.

Esquemáticamente para una matriz general de orden 3, los elementos de la diagonal principal y de la diagonal secundaria se muestran a continuación:

Diagonal Principal

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \mathbf{a_{22}} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & \mathbf{a_{33}} \end{bmatrix}$$

Diagonal Secundaria

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \mathbf{a_{13}} \\ a_{21} & \mathbf{a_{22}} & a_{23} \\ \mathbf{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

T 5 Se define el conjunto $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ como el formado por todas las matrices de orden $m \times n$ cuyos elementos están en el conjunto $\mathbb{K}$. Si $m = n$, entonces el conjunto se denota $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Notemos que $\mathbb{K}$ representa el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$, o el conjunto de los números complejos $\mathbb{C}$, o el conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$. Los elementos de $\mathbb{K}$ se denominan *escalares*.

T 6 Igualdad de Matrices

Dos matrices son iguales si sus órdenes son iguales y si sus elementos correspondientes son iguales, es decir, si $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ y

$B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{p \times q}(\mathbb{K})$, entonces $A = B$ si y solo si $m = p$, $n = q$ y $a_{ij} = b_{ij}$, para $i = 1, 2, \dots, m$ y $j = 1, 2, \dots, n$

Dos matrices A y B no son iguales, lo que se denota $A \neq B$, si sus órdenes no son iguales o si alguno de sus elementos correspondientes no son iguales.

Por ejemplo, las matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & -1+3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1-1 \end{bmatrix}$ son iguales porque ambas son de orden 2 y sus elementos correspondientes coinciden, pues $1 = 1$, $-1 + 3 = 2$, $2 = 2$ y $0 = 1 - 1$

7 Suma de Matrices

Sean $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ y $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$. Se define la *suma de la matriz A con la matriz B* , que se escribe $A + B$, como:

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}) \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$$

Es decir, para obtener la suma de dos matrices del mismo orden es necesario sumar los elementos de la primera matriz con los correspondientes de la segunda matriz.

Por ejemplo, la suma de $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ es la matriz

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+3 & -1+3 & 2+1 \\ 2+(-2) & 0+1 & 4+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

8 Propiedades de la Suma de Matrices

Sean $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ y $C \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$

S1) Conmutativa

$$A + B = B + A$$

S2) Asociativa

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

S3) Existencia de elemento neutro aditivo

Existe una matriz Θ de orden $m \times n$, llamada matriz nula, cuyos elementos son todos cero, tal que:

$$A + \Theta = \Theta + A = A$$

S4) Existencia de elemento inverso aditivo u opuesto

Existe una matriz $-A \equiv (-1)A$ de orden $m \times n$, llamada inverso aditivo de A , tal que:

$$A + (-A) = (-A) + A = \Theta$$

9 Producto por escalar

Sea $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ y sea $\alpha \in \mathbb{K}$. Se define el *producto de una matriz A por un escalar* α , que se escribe $\alpha \cdot A$, como la matriz:

$$\alpha \cdot A = \alpha A = (\alpha a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$$

Es decir, para obtener el producto de una matriz por un escalar es necesario multiplicar cada elemento de la matriz por el escalar considerado.

Por ejemplo, si $A = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, entonces $4 \cdot A = \begin{pmatrix} 4 \cdot 1 \\ 4 \cdot (-3) \\ 4 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -12 \\ 8 \end{pmatrix}$

10 Propiedades del Producto por Escalar

Sean $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$, $\alpha \in \mathbb{K}$ y $\beta \in \mathbb{K}$

PE1) Asociativa respecto del producto por escalares

$$(\alpha\beta) \cdot A = \alpha \cdot (\beta \cdot A)$$

PE2) Conmutativa

$$\alpha \cdot A = A \cdot \alpha$$

PE3) Distributiva respecto de la suma de matrices

$$\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$$

PE4) Distributiva respecto de la suma de escalares

$$(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$$

11 Resta o Diferencia de Matrices

Sean $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ y $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$. Se define la *resta de la matriz A con la matriz B*, que se escribe $A - B$, como la matriz:

$$A - B = A + (-1)B = (a_{ij} - b_{ij}) \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$$

Es decir, debemos multiplicar cada elemento de B por el escalar -1 y luego los elementos de esta matriz resultante se suma con los elementos correspondientes de A , o de forma más directa a los elementos de A se le restan los correspondientes de B

Por ejemplo, si $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, entonces

$$A - B = \begin{bmatrix} 2-6 & -1-2 \\ 3-(-3) & 3-2 \\ 1-2 & 0-(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 6 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

12 Producto de Matrices

Sean $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m \times p}(\mathbb{K})$ y $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{p \times n}(\mathbb{K})$. Se define el *producto de la matriz A por la matriz B* como la matriz $C = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$, que se escribe $A \cdot B$ o AB , y definida como:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj}$$

$$i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$$

La fórmula anterior nos dice que para calcular el elemento que está en la fila i y en la columna j de la matriz producto debemos multiplicar los elementos de la fila i de la primera matriz con los correspondientes de la columna j de la segunda matriz y luego sumar todos estos productos.

El producto de dos matrices existe cuando el número de columnas de la primera matriz es igual al número de filas de la segunda matriz; en caso contrario se dice que el producto no existe, o que no es posible calcularlo, o que no está definido.

El orden de la matriz producto es el número de filas de la primera matriz por el número de columnas de la segunda matriz.

Por ejemplo, si $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$ y $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}_{3 \times 1}$, entonces

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} (1)(2) + (-1)(1) + (2)(-1) \\ (3)(2) + (2)(1) + (1)(-1) \end{bmatrix}_{2 \times 1} = \begin{bmatrix} 2 - 1 - 2 \\ 6 + 2 - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 7 \end{bmatrix}$$

y

$B \cdot A = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}_{3 \times 1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$ no existe, porque el número de columnas de B , que es 1, no coincide con el número de filas de A , que es 2.

Si en el producto $A \cdot B$ la matriz A es igual a la matriz B , ambas cuadradas, se tiene la potencia $A \cdot B = A^2 = A \cdot A$. De forma similar se define la potencia A^3 , que es $A^2 \cdot A$.

La potencia k –ésima de una matriz cuadrada A , con $k \in \mathbb{N}$, es el producto de A por sí misma k veces, es decir,

$$A^k = \overset{k \text{ veces}}{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}$$

Por ejemplo, si $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, entonces

$$A^2 = A A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

13 Propiedades del Producto de Matrices

Sean A , B y C matrices de órdenes apropiados de modo que los productos que se mencionan a continuación existan, y sea α un escalar en $\mathbb{K}$

P1) Asociatividad

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$$

P2) Distributividad respecto de la suma de matrices

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

$$(B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A$$

P3) Movilidad de un escalar en un producto de matrices

$$\alpha \cdot (A \cdot B) = A \cdot (\alpha \cdot B) = (A \cdot B) \cdot \alpha$$

P4) No conmutatividad

En general, el producto de matrices no es conmutativo, es decir

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

Cuando $A \cdot B = B \cdot A$, se dice que las *matrices conmutan*.

14 Matriz Nula

Una matriz rectangular se dice *matriz nula*, y se denota θ ó Θ ó $\Theta_{m \times n}$, si todos sus elementos son iguales a cero. Es decir, $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ es nula si y solo si $a_{ij} = 0$, para cada $i = 1, 2, \dots, m$ y para cada $j = 1, 2, \dots, n$

Por ejemplo, la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ es una matriz nula y la matriz $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ también es una matriz nula.

T 15 Matriz Idéntica o Identidad

Una matriz cuadrada de orden n es *idéntica* o *identidad* o *unidad*, y se denota I_n , o simplemente I , si los elementos de la diagonal principal son todos iguales a 1 y los elementos extradiagonales son todos ceros. Es decir, $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ es idéntica si y solo si $a_{ij} = \begin{cases} 1 & , \text{ si } i = j \\ 0 & , \text{ si } i \neq j \end{cases}$

Por ejemplo, la matriz identidad de orden 2 es $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz idéntica de orden 3 es $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

T 16 Matriz Fila

Una matriz rectangular se dice *matriz fila* si consta de una sola fila, no importando el número de columnas. Es decir, $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ es una matriz fila si y solo si $m = 1$.

Por ejemplo, la matriz $F = [1 \quad -1 \quad 2]$ es una matriz fila.

T 17 Matriz Columna

Una matriz rectangular se dice *matriz columna* si consta de una sola columna, no importando el número de filas. Es decir, $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ es una matriz columna si y solo si $n = 1$.

Por ejemplo, la matriz $C = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ es una matriz columna.

T 18 Matriz Diagonal

Una matriz cuadrada se dice *matriz diagonal* si los elementos extradiagonales son todos iguales a cero. Es decir, $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ es una matriz diagonal si y solo si $a_{ij} = 0$, para $i \neq j$.

Por ejemplo, la matriz $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ es una matriz diagonal, al igual que la matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

T 19 Matriz Escalar

Una matriz cuadrada se dice *matriz escalar* si los elementos extradiagonales son todos iguales a cero y los elementos de la diagonal principal son todos iguales a una constante k . Es decir, $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ es una matriz escalar si y solo si $a_{ij} = \begin{cases} k & , \text{ si } i = j \\ 0 & , \text{ si } i \neq j \end{cases}$

Por ejemplo, la matriz $E = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ es una matriz escalar con $k = -2$.

Notemos que todas las matrices escalares son diagonales, pero no todas las matrices diagonales son escalares.

Por ejemplo, la matriz $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$ es una matriz diagonal, pero no escalar.

T 20 Matriz Triangular

Existen dos tipos de matrices triangulares: las inferiores y las superiores.

a) Una matriz cuadrada se dice *matriz triangular inferior* si los elementos que están sobre la diagonal principal son todos iguales a cero. Es decir, $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ es una matriz triangular inferior si y solo si $a_{ij} = 0$ para $i < j$.

Otra definición que es muy útil en programación es:

$A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ es una matriz triangular inferior si y solo si $a_{ij} = 0$ para $i = 1, 2, \dots, n-1; j = i+1, i+2, \dots, n$

b) Una matriz cuadrada se dice *matriz triangular superior* si los elementos que están bajo la diagonal principal son todos iguales a cero. Es decir, $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ es una matriz triangular superior si y solo si $a_{ij} = 0$ para $i > j$.

Otra definición que es muy útil en programación es:

$A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ es una matriz triangular superior si y solo si $a_{ij} = 0$ para $j = 1, 2, \dots, n-1; i = j+1, j+2, \dots, n$

Por ejemplo, la matriz $T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ es una matriz triangular superior de orden 2 y la matriz $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ es una matriz triangular inferior de orden 3.

T 21 Matriz Tridiagonal

Una matriz $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ se dice *tridiagonal* si y solo si $a_{ij} = 0$, para $|i - j| \geq 2$

Por ejemplo, la matriz $P = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ es una matriz tridiagonal.

T 22 Matriz Traspuesta

Sea $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$. La *traspuesta* de A , denotada A^T (o también A' o A^t), está definida como $A^T = (a_{ji}) \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{K})$. Es decir, para obtener la

traspuesta de una matriz se cambian en forma ordenada las filas por columnas, y por ende las columnas se transforman en las correspondientes filas.

Por ejemplo, si $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 7 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$, entonces $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -2 & 7 & 4 \end{pmatrix}$

23 Propiedades de la Traspuesta

Sean A y B matrices de órdenes apropiados de modo que todos los resultados mencionados existan, y sea α un escalar.

$$\text{T1)} \quad (A^T)^T = A$$

$$\text{T2)} \quad (A + B)^T = A^T + B^T$$

$$\text{T3)} \quad (\alpha \cdot A)^T = \alpha \cdot A^T$$

$$\text{T4)} \quad (A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

24 Matriz Simétrica

Una matriz cuadrada de elementos reales se dice *simétrica* si su traspuesta coincide con ella. Es decir, A es simétrica si y solo si

$$A^T = A$$

Otra definición útil en programación es:

$A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es simétrica si y solo si $a_{ij} = a_{ji}$, con $i = 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, n$

Por ejemplo, la matriz $S = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 3 & -1 & 4 \\ 6 & 4 & -8 \end{bmatrix}$ es una matriz simétrica, pues

$$S^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 3 & -1 & 4 \\ 6 & 4 & -8 \end{bmatrix} = S$$

▮ 25 Matriz Antisimétrica

Una matriz cuadrada de elementos reales se dice *antisimétrica* si su traspuesta coincide con la opuesta de ella, esto significa que los elementos de la diagonal principal deben ser todos cero y los elementos extradiagonales correspondientes difieren sólo en signo. Es decir, A es antisimétrica si y solo si

$$A^T = -A$$

Otra definición útil en programación es:

$A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es antisimétrica si y solo si $a_{ii} = 0, i = 1, 2, \dots, n$ y $a_{ij} = -a_{ji}$, para i distinto de j , con $i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n$

Por ejemplo, la matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ -3 & 0 & 2 \\ -4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ es una matriz antisimétrica,

$$\text{pues } A^T = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -4 \\ 3 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} = -A$$

▮ 26 Matriz Inversa

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Se define la *inversa de A* , denotada A^{-1} , como la única matriz tal que:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$$

con $A^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Si A^{-1} existe se dice que A es invertible, inversible, no singular, no degenerada o regular.

Por ejemplo, la inversa de $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ es $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 1 & 7 & -5 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, pues

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

T 27 Propiedades de la Inversa

Sean A y B matrices cuadradas de orden n invertibles con elementos reales, y α un escalar real.

Inv1) A^{-1} es única.

Inv2) $(A^{-1})^{-1} = A$

Inv3) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Inv4) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

Inv5) $(\alpha A)^{-1} = \alpha^{-1} A^{-1} = \frac{1}{\alpha} A^{-1}$, con $\alpha \neq 0$

Inv6) A triangular $\Rightarrow A^{-1}$ triangular

A diagonal $\Rightarrow A^{-1}$ diagonal

A simétrica $\Rightarrow A^{-1}$ simétrica

A antisimétrica $\Rightarrow A^{-1}$ antisimétrica

T 28 Inversa de una matriz de orden 2

Sea $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Se tiene que :

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}, \text{ con } ad-bc \neq 0$$

La fórmula anterior nos permite calcular la inversa de una matriz cualquiera de orden 2 que cumpla con la condición $ad - bc \neq 0$.

¿Qué sucede si $ad - bc = 0$? En ese caso la inversa no existe, y si no existe la inversa no tiene sentido calcularla, por lo que siempre se debe calcular primero el número $ad - bc$ y si es distinto de cero podemos aplicar la fórmula anterior.

T 29 Matriz Ortogonal

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz invertible. La matriz A se dice *ortogonal* si y solo si $A^T = A^{-1}$, o en forma equivalente cuando $A^T \cdot A = I$

Por ejemplo, la matriz $A = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sen(\alpha) \\ -\sen(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$, con $\alpha \in \mathbb{R}$, es una matriz ortogonal, pues

$$\begin{aligned} A^T \cdot A &= \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sen(\alpha) \\ \sen(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sen(\alpha) \\ -\sen(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos^2(\alpha) + \sen^2(\alpha) & \cos(\alpha)\sen(\alpha) - \sen(\alpha)\cos(\alpha) \\ \sen(\alpha)\cos(\alpha) - \cos(\alpha)\sen(\alpha) & \sen^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

T 30 Propiedades de las Matrices Ortogonales

Sean A y B matrices cuadradas de orden n invertibles con elementos reales, y α un escalar real.

Ort1) Todas las matrices ortogonales tienen determinante igual a 1 ó -1.

Ort2) Si A y B son matrices ortogonales, entonces AB es también ortogonal.

Ort3) Si A es ortogonal, entonces A^{-1} también lo es.

Ort4) Si A es ortogonal, entonces A^T también lo es.

Ort5) La matriz idéntica de cualquier orden es ortogonal.

Ort6) Cualquier matriz ortogonal de orden 2 tiene alguna de las formas siguientes

$$\begin{bmatrix} -\cos(\alpha) & \sen(\alpha) \\ \sen(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sen(\alpha) \\ \sen(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sen(\alpha) \\ -\sen(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sen(\alpha) \\ \sen(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

con α un número real cualquiera.

T 31 Traza de una Matriz Cuadrada

Sea $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Se define la *traza de A*, denotada $tr(A)$ o *traza(A)*, como la suma de los elementos de la diagonal principal, es decir, $tr(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$

Por ejemplo, si $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 7 & 2 & 7 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, entonces $tr(A) = 2 + 2 + 1 = 5$

T 32 Propiedades de la Traza

Sean A y B matrices cuadradas de orden n , y α un escalar real.

Tr1) $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$

Tr2) $tr(\alpha A) = \alpha tr(A)$

Tr3) $tr(A^T) = tr(A)$

Tr4) $tr(A \cdot B) = tr(B \cdot A)$

T 33 Operaciones Elementales

El calcular inversas de orden 3 o superior usando la definición **T 26** se torna un proceso largo y poco práctico, porque por ejemplo, para calcular la inversa de una matriz de orden 4 debemos resolver un sistema de 16 ecuaciones y 16 incógnitas. Un método mucho mejor es mediante el uso de operaciones elementales.

Sea $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$. Se definen las siguientes tres *operaciones elementales sobre filas* (también se pueden definir sobre columnas, pero no lo consideraremos):

(1) *Intercambiar o permutar las filas i y j de A .* Esto se escribe $F_{ij}(A)$, o F_{ij} cuando quede claro con respecto a qué matriz se está realizando la operación elemental. Notemos que: $F_{ij}(A) = F_{ji}(A)$

(2) *Multiplicar la fila i de A por un escalar no nulo k .* Esto se escribe $F_i(k)(A)$, o $F_i(k)$ cuando quede claro con respecto a qué matriz se está realizando la operación elemental.

(3) *Multiplicar la fila i de A por un escalar no nulo k y sumar el resultado a la fila j .* Esto se escribe $(F_i(k) + F_j)(A)$, o $F_i(k) + F_j$. Es común escribir $F_j \leftarrow F_i(k) + F_j$ para dejar claramente establecido que la nueva fila j es la fila i multiplicada por el escalar k sumada a la antigua fila j .

T 34 Cálculo de la inversa mediante operaciones elementales

La pregunta ahora es: ¿De qué modo voy a usar las operaciones elementales para calcular la inversa de una matriz cuadrada de orden superior?.

Primero necesitamos saber cuándo dos matrices son equivalentes.

Sean $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ y $B \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$. Las *matrices* A y B se dicen *equivalentes*, lo que se denota $A \sim B$, si una puede ser obtenida de la otra mediante operaciones elementales.

Por ejemplo, $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ es equivalente a $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ porque B se puede obtener de A multiplicando la segunda fila de A por $\frac{1}{3}$; o también se puede decir que A se obtiene de B multiplicando la segunda fila de B por 3.

En segundo lugar, necesitamos conocer qué es una matriz ampliada.

Sean $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ y $B \in \mathcal{M}_{m \times p}(\mathbb{K})$. La matriz $(A \mid B)$ de orden $m \times (n + p)$ se denomina *matriz ampliada* o *matriz aumentada* y está formada por las columnas de A a las que se les agrega al final las columnas de B

Por ejemplo, si $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$ y $B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 7 & -9 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$, entonces la matriz ampliada es

$$(A \mid B) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 7 & -9 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 6 \end{bmatrix}_{3 \times 5}$$

Ahora, para calcular la inversa de una matriz cuadrada A mediante operaciones elementales debemos hacer uso del siguiente teorema:

$$(A \mid I) \sim (I \mid A^{-1})$$

donde I representa la matriz idéntica del mismo orden de A .

Lo anterior significa que partimos con la matriz ampliada $(A \mid I)$ y mediante operaciones elementales intentamos generar la matriz idéntica donde está la matriz A y a la par efectuamos las mismas operaciones sobre la idéntica, si el proceso llega a su término tendremos donde estaba la matriz A a la idéntica y donde estaba la idéntica tendremos la inversa de A . Además, si el proceso no es posible finalizarlo significará que la inversa no existe.

EJERCICIOS MATRICES

[1] Escriba:

- a) un ejemplo de matriz de orden 2×3 cuyos elementos sean números reales.
- b) un ejemplo de matriz cuadrada de orden 2 cuyos elementos sean números complejos.

[2] Escriba los elementos de las matrices $A = (a_{ij})_{2 \times 3}$ y $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ definidas como:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & , \text{ si } i = j \\ \frac{1}{i-j} & , \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

$$b_{ij} = (-1)^{i+j}$$

[3] Calcule $A + B$ para

$$a) A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$b) A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & i & 1-i \end{bmatrix} \text{ y } B = [1 \quad -i \quad 1+i]$$

[4] Calcule $-5 \cdot A$ con $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

[5] Calcule $A - B$ para

$$a) A = \begin{bmatrix} a & -a \\ -a & a \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} -a & a \\ -a & a \end{bmatrix}$$

$$b) A = (1 \ 2 \ i) \text{ y } B = (-1 \ 2 \ i - 1)$$

[6] Calcule $A \cdot B$ y $B \cdot A$ para

$$a) A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$b) A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ y } B = [3 \quad -4]$$

[7] Escriba:

- a) la matriz nula de orden 2×3 y la de orden 3
- b) las matrices idénticas de orden 2 y de orden 3
- c) dos ejemplos de matrices fila
- d) dos ejemplos de matrices columna
- e) dos ejemplos de matrices diagonales
- f) dos ejemplos de matrices escalares
- g) un ejemplo de matriz triangular inferior y otro de matriz triangular superior
- h) en forma general, la matriz tridiagonal de orden 4 con elementos reales

[8] Obtenga la traspuesta de las siguientes matrices

$$a) A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 7 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$$

$$b) B = \begin{pmatrix} 0 & a & -a \\ a & 0 & a \\ -a & a & 0 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}$$

[9] Verifique si las siguientes matrices son simétricas.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

c) $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

[10] Verifique si las siguientes matrices son antisimétricas

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

b) $B = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

c) La matriz nula de orden 3

[11] Una matriz cuadrada de elementos reales se dice *involutiva* si su cuadrado coincide con la idéntica del mismo orden. Es decir, A es involutiva si y solo si $A^2 = I$.

Obtenga dos ejemplos de matrices involutivas de orden 2

[12] Una matriz cuadrada de elementos reales se dice *idempotente* si su cuadrado coincide con ella misma. Es decir, A es idempotente si y solo si $A^2 = A$.

Obtenga cuatro ejemplos de matrices idempotentes de orden 2

[13] Una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se dice *nilpotente de índice k* si existe un número natural k , que es el menor posible, tal que $A^k = \Theta_n$.

Obtenga un ejemplo de matriz de orden 2 nilpotente de índice 2, distinta de la nula.

[14] Una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se dice *periódica de periodo k* si existe un número natural k , que es el menor posible, tal que $A^k = A$.

Obtenga dos ejemplos de matrices de orden 2 periódicas de periodo 3, distintas de la nula.

[15] Calcule las inversas de

a) $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, con $ad - bc \neq 0$

b) $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

[16] Obtenga $F_{21}(A)$ y $F_{13}(F_{12}(A))$ si $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

[17] Obtenga $F_2(-2)(A)$ y $F_3(\frac{1}{2})(A)$ si $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ 4 & 8 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

[18] Obtenga $(F_2(-2) + F_1)(A)$ y $(F_3(\frac{1}{2}) + F_2)(A)$ si $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix}$

[19] Calcule la inversa de las siguientes matrices usando operaciones elementales

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix}$

b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

$$c) C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

[20] Sea $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ la matriz definida de la siguiente manera:

$$a_{i1} = 2^i, i = 1, 2, 3$$

$$a_{ij} = \frac{(-1)^{i+j}}{(i+j-1)}, i = 1, 2, 3; j = 2, 3$$

a) Escriba explícitamente la matriz A .

b) Emplee operaciones elementales para determinar si esta matriz es inversible y encuentre la inversa en caso de que esta exista

c) ¿Es triangular la matriz A ?

[21] Sean las matrices $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

a) Calcule $A^3 - 3B^2 + 10I_3$

b) Emplee operaciones elementales para determinar si la matriz B es invertible y encuentre la inversa en caso de que esta exista

c) Calcule $(AB)^T$ y compare el resultado con $B^T \cdot A^T$

[22] Se dice que una matriz cuadrada A es *ortogonal* ssi $A^{-1} = A^T$, que es lo mismo que escribir A es *ortogonal* ssi $A A^T = I$.
Muestre que

$$A = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & 0 & \sin(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}$$

es ortogonal, utilizando operaciones elementales.

[23] Sea $R(\beta) = \begin{pmatrix} \cos(\beta) & -\operatorname{sen}(\beta) \\ \operatorname{sen}(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix}$.

Calcule:

a) $R(\beta_1) R(\beta_2)$

b) $R(\beta_1 + \beta_2)$

c) $R(\beta_1) + R(\beta_2)$

d) $[R(\beta)]^2$

[24] Obtenga todas las matrices que conmuten en $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ con $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

[25] Muestre que la propiedad $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ se verifica para

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

[26] Encuentre matrices en $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ que verifiquen las propiedades siguientes:

a) $AB = \Theta$; $A \neq \Theta$; $B \neq \Theta$

b) $A^2 = \Theta$; $A \neq \Theta$

c) $AB = \Theta$ y $BA \neq \Theta$

d) $A^2 = A$; $A \neq I_2$

e) $AB = AC$; $B \neq C$

f) $A^T = A$; $A \neq I_2$

g) $AB = I_2$; $A \neq I_2$

Obs.: 1) Θ representa la matriz nula.

2) I_2 representa la matriz identidad de orden 2.

[27] Considere dos matrices triangular superior de orden n . ¿Qué sucede con la suma y con el producto?

Haga el mismo estudio anterior para matrices diagonales y escalares. ¿Qué concluye?

[28] Dadas las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1+i & -\frac{1}{i} \\ -i^2 & -\frac{3i}{(i+1)^3} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} \frac{2-i}{1-i} & -\frac{1}{i^3} \\ 2+i & 2i \end{bmatrix}$$

Calcule AB ; BA ; A^2 ; B^2 ; $(A+B)^2$; $(A-B)^2$; $(i-1)A$.

[29] Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -i & 1-i^2 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Obtenga las siguientes matrices:

a) A^t

b) $\left[(F_1(-1) + F_2) + F_{21} \right](A)$

c) $-(1+i) \cdot A$

d) $[F_1(-3)(A)] \cdot I^t$

[30] Muestre que la inversa de una matriz triangular superior de orden 3, cuando existe, es siempre triangular superior.

[31] a) Recordemos que a_{ii} , $i = 1, 2, 3, \dots, n$ indica cuáles son los elementos que están en la diagonal principal de una matriz $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Escriba expresiones generales que muestren cuáles son los elementos que están en la superdiagonal, en la subdiagonal y en la diagonal secundaria.

b) Si $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, entonces escriba una fórmula para calcular la suma de los elementos de una fila cualquiera de la matriz.

[32] Dadas las matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $D = \begin{bmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 1 & d \end{bmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$, $d \in \mathbb{R}$, calcule:

a) $D^2 \cdot A^T$

b) $(D^{-1})^T + (D^T)^{-1} - aA$

[33] Calcule, usando operaciones elementales, la inversa de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

[34] Sea $A \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ dada por

$$a_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{(i+j)} & , i+j > 2 \\ 0 & , i+j \leq 2 \end{cases}$$

a) Obtenga A

b) Verifique si $3A - 3A^T$ es antisimétrica

c) Calcule $[(10A \cdot A^T)]^{-1}$

d) Averigue si $A^{-1} \cdot (A^{-1})^T \cdot A^T \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

[35] Muestre que si $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, con $a_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{i \cdot j} & , \text{ si } |i - j| < 2 \\ 0 & , \text{ en caso contrario} \end{cases}$, entonces $(A^T)^2$ es simétrica.

[36] Muestre que si $A = L D L^T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donde L y D son matrices de órdenes apropiados y además D es una matriz diagonal, entonces A es simétrica.

[37] Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$, exprese simbólicamente lo

siguiente :

- a) Los elementos de la diagonal secundaria.
- b) La suma de los elementos de la superdiagonal.
- c) El promedio de los elementos de cada columna.
- d) Generalice los resultados anteriores para una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$

[38] Muestre que si $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, entonces la segunda fila de $(A^3)^{-1}$ es distinta de la nula

[39] Muestre que si A y B son ortogonales, entonces $A \cdot B$ también lo es.

[40] Verifique si $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ es ortogonal

[41] Sean $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ donde

$$a_{ij} = \frac{i-j}{i+j}, \quad i = 1, 2; \quad j = 1, 2, 3$$

$$b_{ij} = \frac{i-j}{2^{i+j}}, \quad i = 1, 2; \quad j = 1, 2, 3$$

Calcule :

a) $-\frac{1}{2}A + \left(\frac{3}{2}\right)^3 B$

b) $A - B + 3(B - A)$

[42] Sea $A \in \mathcal{M}_{2 \times 3}(\mathbb{R})$ dada por $a_{ij} = \begin{cases} (-1)(i+j) & , i+j > 2 \\ 0 & , i+j \leq 2 \end{cases}$

Calcule: a) $3A$ b) $\frac{1}{2}(A \cdot A^T)$

[43] Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Usando operaciones elementales calcule $(A^T)^{-1} \cdot B^{-1}$

[44] Calcule $A_f^{-1}(x)$, usando operaciones elementales, donde

$$A_f(x) = \begin{bmatrix} f(x) & f'(x) & f''(x) \\ f'(x) & f(x) & f'''(x) \\ f''(x) & f'''(x) & f(x) \end{bmatrix}$$

para $f(x) = -2x + 1$.

¿Existe $A_f^{-1}(1)$?

[45] Calcule $\left[(5A - 3B) \cdot (B + 2A)\right]^{-1}$ para $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

[46] Obtenga dos matrices de orden 3, distintas de la idéntica y de la nula, para las cuales se cumpla la conmutatividad de la multiplicación

[47] Si $X = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ x_3 & 1 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ x_n & 1 \end{pmatrix}_{n \times 2}$ y $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{pmatrix}_{n \times 1}$, entonces calcule:

a) $X^T X$

b) $X^T Y$

[48] Si $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, entonces obtenga A , usando operaciones elementales.

[49] Muestre que si A es una matriz cuadrada tal que $A + \frac{1}{2}I$ y $A - \frac{1}{2}I$ son ambas ortogonales, entonces A es antisimétrica.

PROBLEMAS RESUELTOS

MATRICES

1

Escriba:

- a) un ejemplo de matriz de orden 2×3 cuyos elementos sean números reales.
- b) un ejemplo de matriz cuadrada de orden 2 cuyos elementos sean números complejos.

Solución:

- a) Un ejemplo de matriz de orden 2×3 con elementos reales puede ser

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

- b) Un ejemplo de matriz cuadrada de orden 2 con elementos complejos puede ser

$$B = \begin{bmatrix} i & 0 \\ -i & 1 + 3i \end{bmatrix} \quad \square$$

2

Escriba los elementos de las matrices $A = (a_{ij})_{2 \times 3}$ y $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ definidas como:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & , \text{ si } i = j \\ \frac{1}{i-j} & , \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

$$b_{ij} = (-1)^{i+j}$$

Solución:

La matriz A es de orden 2×3 y la escribiremos en forma general para determinar cuáles son sus elementos, pues éstos dependen de los índices i y j .

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{1-2} & \frac{1}{1-3} \\ \frac{1}{2-1} & 1 & \frac{1}{2-3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

La matriz B es cuadrada de orden 3 y para obtener sus elementos la escribiremos en forma general.

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1} & (-1)^{1+2} & (-1)^{1+3} \\ (-1)^{2+1} & (-1)^{2+2} & (-1)^{2+3} \\ (-1)^{3+1} & (-1)^{3+2} & (-1)^{3+3} \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \square$$

3

Calcule $A + B$ para

$$a) A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$b) A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & i & 1-i \end{bmatrix} \text{ y } B = [1 \quad -i \quad 1+i]$$

Solución:

$$a) A + B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -1+1 & 3+(-1) & 0+2 \\ 1+2 & -1+(-1) & 0+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A + B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & 3 \end{bmatrix} \text{ para } A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

b) La matriz A es cuadrada de orden 3 y la matriz B es de orden 1×3 , luego de acuerdo a la definición de suma de matrices es imposible sumar dos matrices que tengan órdenes distintos.

En definitiva, $A + B$ no existe con $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & i & 1-i \end{bmatrix}$ y

$$B = [1 \quad -i \quad 1+i] \quad \square$$

4

$$\text{Calcule } -5 \cdot A \text{ con } A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Solución:

$$-5 \cdot A = -5 \cdot \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-5)(-1) & (-5)(3) & (-5)(0) \\ (-5)(1) & (-5)(-1) & (-5)(0) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 5 & -15 & 0 \\ -5 & 5 & 0 \end{bmatrix} \quad \square$$

5Calcule $A - B$ para

$$a) A = \begin{bmatrix} a & -a \\ -a & a \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} -a & a \\ -a & a \end{bmatrix}$$

$$b) A = (1 \ 2 \ i) \text{ y } B = (-1 \ 2 \ i - 1)$$

Solución:

$$a) A - B = \begin{bmatrix} a & -a \\ -a & a \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} -a & a \\ -a & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -a \\ -a & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & -a \\ a & -a \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 2a & -2a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A - B = \begin{bmatrix} 2a & -2a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ para } A = \begin{bmatrix} a & -a \\ -a & a \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} -a & a \\ -a & a \end{bmatrix}$$

$$b) A - B = (1 \ 2 \ i) + (-1)(-1 \ 2 \ i - 1) =$$

$$(1 \ 2 \ i) + (1 \ -2 \ -i + 1) = (2 \ 0 \ 1)$$

$$\therefore A - B = (2 \ 0 \ 1) \text{ para } A = (1 \ 2 \ i) \text{ y } B = (-1 \ 2 \ i - 1) \quad \square$$

6Calcule $A \cdot B$ y $B \cdot A$ para

$$a) A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$b) A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ y } B = [3 \ -4]$$

Solución:

a) La matriz A es de orden 3×2 y la matriz B es de orden 2×3 , luego el número de columnas de A , que es 2, coincide con el número de filas de B y es posible calcular $A \cdot B$ que será una matriz cuadrada de orden 3.

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} (1)(1) + (-1)(1) & (1)(-4) + (-1)(1) & (1)(3) + (-1)(1) \\ (2)(1) + (4)(1) & (2)(-4) + (4)(1) & (2)(3) + (4)(1) \\ (3)(1) + (5)(1) & (3)(-4) + (5)(1) & (3)(3) + (5)(1) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1-1 & -4-1 & 3-1 \\ 2+4 & -8+4 & 6+4 \\ 3+5 & -12+5 & 9+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -5 & 2 \\ 6 & -4 & 10 \\ 8 & -7 & 14 \end{bmatrix} \\ \therefore A \cdot B &= \begin{bmatrix} 0 & -5 & 2 \\ 6 & -4 & 10 \\ 8 & -7 & 14 \end{bmatrix} \text{ para } A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ahora al calcular BA nos damos cuenta que el número de columnas de B es 3 y el número de filas de A es 3, por lo que es posible calcular BA que será cuadrada de orden 2.

$$\begin{aligned} BA &= \begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} (1)(1) + (-4)(2) + (3)(3) & (1)(-1) + (-4)(4) + (3)(5) \\ (1)(1) + (1)(2) + (1)(3) & (1)(-1) + (1)(4) + (1)(5) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1-8+9 & -1-16+15 \\ 1+2+3 & -1+4+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} \\ \therefore B \cdot A &= \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} \text{ para } B = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

b) En este ejercicio notamos que A es una matriz cuadrada de orden 2 y B es de orden 1×2 , luego al intentar calcular $A \cdot B$ nos damos cuenta que el número de columnas de A , que es 2, no coincide con el número de filas de B , que es 1, por lo que el producto $A \cdot B$ no existe. En cambio, al intentar calcular $B \cdot A$ notamos que el número de columnas de B , que es 2, coincide con el número de filas de A , además el orden de $B \cdot A$ será 1×2 .

Calculemos el producto $B \cdot A$:

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = [(3)(3) + (-4)(1) \quad (3)(2) + (-4)(0)] =$$

$$[9 - 4 \quad 6 + 0] = [5 \quad 6]$$

$$\therefore B \cdot A = [5 \quad 6] \text{ para } B = \begin{bmatrix} 3 & -4 \end{bmatrix} \text{ y } A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \square$$

7

Escriba:

- a) la matriz nula de orden 2×3 y la de orden 3
- b) las matrices idénticas de orden 2 y de orden 3
- c) dos ejemplos de matrices fila
- d) dos ejemplos de matrices columna
- e) dos ejemplos de matrices diagonales
- f) dos ejemplos de matrices escalares
- g) un ejemplo de matriz triangular inferior y otro de matriz triangular superior
- h) en forma general, la matriz tridiagonal de orden 4 con elementos reales

Solución:

a) La matriz nula de orden 2×3 es $\Theta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

La matriz nula de orden 3 es $\Theta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \square$

b) La matriz idéntica de orden 2 es $I_2 \equiv I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

La matriz idéntica de orden 3 es $I_3 \equiv I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ☐

c) El primer ejemplo de matriz fila puede ser:

$$A = (1 \quad -3 \quad 5)$$

En este caso el orden es 1×3 y los elementos son números reales.

El segundo ejemplo de matriz fila:

$$B = (i + 1)$$

En este caso el orden es 1×1 y el elemento es un número complejo. ☐

d) El primer ejemplo de matriz columna puede ser:

$$A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

En este caso el orden es 3×1 y los elementos son números reales; además podemos decir que A es nula.

El segundo ejemplo de matriz columna:

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

En este caso el orden es 2×1 y los elementos son números reales. ☐

e) El primer ejemplo de matriz diagonal es:

$$D_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & i - 2 \end{bmatrix}$$

En este caso el orden es 3×3 y los elementos son números complejos.

El segundo ejemplo de matriz diagonal es:

$$D_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

En este caso el orden es 2×2 y los elementos son números reales. ☐

f) El primer ejemplo de matriz escalar es:

$$E_1 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

En este caso el orden es 3×3 , los elementos son números reales y el escalar considerado es $k = 3$.

El segundo ejemplo de matriz escalar es:

$$D_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

En este caso el orden es 2×2 , los elementos son números reales y el escalar considerado es $k = -1$. ☐

g) Una matriz triangular inferior puede ser:

$$T = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

En este caso el orden es 3, los elementos son números reales y también puede ser concebida como matriz triangular superior.

Una matriz triangular superior puede ser:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

En este caso el orden es 2 y los elementos son números reales. ☐

h) La matriz tridiagonal general de orden 4 es:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix},$$

con $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{32}, a_{33}, a_{34}, a_{43}, a_{44} \in \mathbb{R}$ $\square$

8

Obtenga la traspuesta de las siguientes matrices

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 7 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 0 & a & -a \\ a & 0 & a \\ -a & a & 0 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}$

Solución:

a) En este caso la matriz A es de orden 3×2 , por lo tanto la traspuesta tendrá orden 2×3 .

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -3 & 7 & -5 \end{bmatrix}$$

Notemos que la primera columna de la matriz A es la primera fila de la matriz A^T , y la segunda columna de la matriz A es la segunda fila de la matriz A^T .

b) En este ejercicio la matriz B es cuadrada con elementos reales y de orden 3, por lo tanto B^T también será cuadrada de orden 3.

$$B^T = \begin{pmatrix} 0 & a & -a \\ a & 0 & a \\ -a & a & 0 \end{pmatrix}$$

Observamos que B^T coincide con B ; cuando sucede esto estamos frente a una matriz llamada simétrica. $\square$

9

Verifique si las siguientes matrices son simétricas.

a) $A = (1 \quad -1)$

b) $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

c) $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Solución:

a) En este caso la matriz es de orden 1×2 y la simetría es una característica reservada exclusivamente para las matrices cuadradas, por lo tanto, no tiene sentido hablar de simetría al trabajar con matrices no cuadradas.

b) En este ejercicio la matriz B es cuadrada de orden 2 y notamos que $b_{12} = -2 = b_{21}$, por lo tanto B es simétrica, porque $B^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = B$.

c) En este caso la matriz es cuadrada de orden 3, pero $c_{12} = -1 \neq 2 = c_{21}$.
Luego C no es simétrica, porque $C^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = C$ □

10

Verifique si las siguientes matrices son antisimétricas

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

b) $B = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

c) La matriz nula de orden 3

Solución:

a) En este caso la matriz es de orden 2 y observamos que $a_{11} = 2 \neq 0$, esto muestra que A no es antisimétrica.

Otra manera de mostrar lo mismo es calcular A^T y compararla con $-A$:

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = -A$$

b) En este ejercicio la matriz B es cuadrada de orden 3 y notamos que todos los elementos de la diagonal principal son ceros y que $b_{12} = a = -b_{21}$, $b_{13} = 0 = -b_{31}$, $b_{23} = 0 = -b_{32}$, por lo tanto B es antisimétrica.

Otra manera de mostrar lo mismo es calcular B^T y compararla con $-B$:

$$B^T = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & -a & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = -B$$

c) En este caso la matriz es cuadrada de orden 3 y se cumple que $\Theta^T = -\Theta$, por lo que la matriz nula de orden 3 es antisimétrica. $\square$

11

Una matriz cuadrada de elementos reales se dice *involutiva* si su cuadrado coincide con la idéntica del mismo orden. Es decir, A es involutiva si y solo si $A^2 = I$.

Obtenga dos ejemplos de matrices involutivas de orden 2

Solución:

Sea $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ una matriz cualquiera de orden 2 con elementos reales.

Tenemos que

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + dc & cb + d^2 \end{bmatrix}$$

Luego

$$A^2 = I \Rightarrow \begin{bmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + dc & cb + d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$a^2 + bc = 1 \quad (1)$$

$$ab + bd = 0 \quad (2)$$

$$ac + dc = 0 \quad (3)$$

$$cb + d^2 = 1 \quad (4)$$

De la ecuación (2) se tiene que:

$$b(a + d) = 0 \Rightarrow b = 0 \vee a = -d$$

Supongamos en lo que sigue que $b = 0$.

Reemplazando $b = 0$ en la ecuación (1):

$$a^2 + (0)(c) = 1 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = 1 \vee a = -1$$

Reemplazando $b = 0$ en la ecuación (4):

$$(c)(0) + d^2 = 1 \Rightarrow d^2 = 1 \Rightarrow d = 1 \vee d = -1$$

Notemos que de la ecuación (3) se tiene:

$$c(a + d) = 0 \Rightarrow c = 0 \vee a = -d$$

Lo anterior muestra que podemos elegir por ejemplo:

$$b = 0, a = 1, d = -1, \text{ y } c \text{ cualquier valor.}$$

Por lo tanto dos matrices involutivas pueden ser:

$$A_1 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$$

Observemos que

$$A_1^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$A_2^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I \quad \square$$

12

Una matriz cuadrada de elementos reales se dice *idempotente* si su cuadrado coincide con ella misma. Es decir, A es idempotente si y solo si $A^2 = A$.
Obtenga cuatro ejemplos de matrices idempotentes de orden 2

Solución:

Sea $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$ una matriz de orden 2 con elementos reales. Esta estructura inicial es absolutamente arbitraria y se elige esta porque es más fácil trabajar con dos incógnitas (a y b) que trabajar con tres o cuatro.
La forma inicial de la matriz la podemos elegir a nuestro gusto, para comenzar a trabajar.

Tenemos que

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + b^2 & 2ab \\ 2ab & a^2 + b^2 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = A \Rightarrow \begin{bmatrix} a^2 + b^2 & 2ab \\ 2ab & a^2 + b^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$a^2 + b^2 = a \quad (1)$$

$$2ab = b \quad (2)$$

De (2) se tiene que:

$$2ab - b = 0 \Rightarrow b(2a - 1) = 0 \Rightarrow b = 0 \quad \vee \quad a = \frac{1}{2}$$

Si reemplazamos $b = 0$ en la ecuación (1) se tiene que:

$$a^2 + 0 = a \Rightarrow a^2 = a \Rightarrow a^2 - a = 0 \Rightarrow a(a - 1) = 0 \Rightarrow a = 0 \quad \vee \quad a = 1$$

De estos resultados obtenemos dos matrices:

$$A_1 = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Lo anterior nos dice que las matrices nula e idéntica son idempotentes.

Por otro lado, si reemplazamos $a = \frac{1}{2}$ en la ecuación (1) se tiene que:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + b^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow b^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \Rightarrow b^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow b = \pm \frac{1}{2}$$

De los resultados anteriores se obtiene que:

$$A_3 = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Finalmente podemos decir que cuatro ejemplos de matrices idempotentes pueden ser:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \Theta_2$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \square$$

13

Una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ se dice *nilpotente de índice k* si existe un número natural k , que es el menor posible, tal que $A^k = \Theta_n$.
Obtenga un ejemplo de matriz de orden 2 nilpotente de índice 2, distinta de la nula.

Solución:

Sea $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ una matriz de orden 2. Notemos que esta estructura inicial es arbitraria, esto significa que podemos elegir una estructura diferente para comenzar a trabajar.

Tenemos que

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + b^2 & ab + bc \\ ab + bc & b^2 + c^2 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \Theta_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} a^2 + b^2 & ab + bc \\ ab + bc & b^2 + c^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$a^2 + b^2 = 0 \quad (1)$$

$$ab + bc = 0 \quad (2)$$

$$b^2 + c^2 = 0 \quad (3)$$

De (1) se tiene que:

$$a^2 = -b^2 \Rightarrow a = \pm bi$$

De (2) se tiene que:

$$b(a + c) = 0 \Rightarrow b = 0 \vee c = -a$$

De lo anterior concluimos que una matriz nilpotente con $k = 2$ puede ser:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} bi & b \\ b & -bi \end{bmatrix}, \text{ con } b \in \mathbb{R}$$

En particular, una matriz nilpotente de índice $k = 2$ es : $A = \begin{bmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{bmatrix}$ $\square$

14

Una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se dice *periódica de periodo k* si existe un número natural k , que es el menor posible, tal que $A^k = A$.

Obtenga dos ejemplos de matrices de orden 2 periódicas de periodo 3, distintas de la nula.

Solución:

La matriz $T = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ es periódica de periodo 3, pues

$$T^3 = \left(\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = T$$

Además la matriz $-I_2$ es periódica de periodo 3 pues

$$(-I_2)^3 = (-1)^3 I_2^3 = -I_2$$

Finalmente, los dos ejemplos de matrices periódicas de periodo 3, distintas de la nula, son:

$$T = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad -I = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \square$$

Calcule las inversas de

a) $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, con $ad - bc \neq 0$

b) $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

Solución:

a) Usando la definición tenemos que si $A^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$, entonces

$$A \cdot A^{-1} = I_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$ax + bz = 1 \quad (1)$$

$$ay + bw = 0 \quad (2)$$

$$cx + dz = 0 \quad (3)$$

$$cy + dw = 1 \quad (4)$$

Multiplicando la ecuación (1) por $-c$, con $c \neq 0$, y la ecuación (3) por a , con $a \neq 0$, se tiene que:

$$-cax - cbz = -c$$

$$acx + adz = 0$$

Sumando las ecuaciones anteriores:

$$(ad - bc)z = -c \Rightarrow z = \frac{-c}{ad-bc}, \text{ con } ad - bc \neq 0.$$

Reemplazando el valor de z recién calculado en (3) se tiene que:

$$cx = -dz \Rightarrow x = \frac{-d}{c}z \Rightarrow x = \frac{-d}{c} \frac{-c}{ad-bc} \Rightarrow x = \frac{d}{ad-bc}$$

Multiplicando la ecuación (2) por $-c$ y la ecuación (4) por a se tiene que:

$$\begin{aligned} -ac y - bc w &= 0 \\ ac y + ad w &= a \end{aligned}$$

Sumando las ecuaciones anteriores se tiene que:

$$(ad - bc) w = a \Rightarrow w = \frac{a}{ad - bc}$$

Reemplazando este resultado en (2):

$$ay + bw = 0 \Rightarrow ay = -bw \Rightarrow y = -\frac{b}{a}w \Rightarrow y = -\frac{b}{a} \frac{a}{ad - bc} \Rightarrow y = \frac{-b}{ad - bc}$$

Por lo tanto

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ad - bc} & \frac{-b}{ad - bc} \\ \frac{-c}{ad - bc} & \frac{a}{ad - bc} \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Finalmente, podemos decir que:

$$\boxed{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}, \text{ con } ad - bc \neq 0}$$

El desarrollo anterior demuestra lo indicado en **T 28**

b) Para calcular la inversa de $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ usaremos la fórmula obtenida en el ejercicio anterior.

Notemos que: $a = 1$, $b = -1$, $c = 3$ y $d = 2$.

Luego

$$ad - bc = 1 \cdot 2 - (-1) \cdot 3 = 2 + 3 = 5 \neq 0$$

En este caso vemos que es posible calcular la inversa de B .

$$B^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

¿Es posible verificar si la inversa calculada recién está correcta?.

La respuesta es afirmativa. Si pensamos en la definición de inversa notamos que $B \cdot B^{-1}$ debe ser igual a la idéntica de orden 2.

$$B \cdot B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} + \frac{3}{5} & \frac{1}{5} - \frac{1}{5} \\ \frac{6}{5} - \frac{6}{5} & \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esto muestra que la inversa que calculamos es correcta.

c) Notemos que para $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ se tiene que $ad - bc = 1 - 1 = 0$, por tal motivo podemos decir que C^{-1} no existe. $\square$

16

Obtenga $F_{21}(A)$ y $F_{13}(F_{12}(A))$ si $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Solución:

Calculemos en primer lugar $F_{21}(A)$, es decir, debemos intercambiar las filas 1 y 2 de A .

$$F_{21}(A) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ahora calculemos $F_{13}(F_{12}(A))$, recordando que $F_{21}(A) = F_{12}(A)$.

$$F_{13}(F_{12}(A)) = F_{13}\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \square$$

17

Obtenga $F_2(-2)(A)$ y $F_3(\frac{1}{2})(A)$ si $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ 4 & 8 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

Solución:

Calculemos $F_2(-2)(A)$

$$F_2(-2)(A) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ (-2)(2) & (-2)(0) & (-2)(0) & (-2)(-1) \\ 4 & 8 & 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ -4 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 8 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Ahora, para calcular $F_3(\frac{1}{2})(A)$ multiplicamos cada elemento de la fila 3 de A por $\frac{1}{2}$ para obtener:

$$F_3(\frac{1}{2})(A) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \square$$

18

Obtenga $(F_2(-2) + F_1)(A)$ y $(F_3(\frac{1}{2}) + F_2)(A)$ si $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix}$

Solución:

Calculemos $(F_2(-2) + F_1)(A)$. Para ello multiplicamos los elementos de la fila 2 de A por el escalar -2 y el resultado se lo sumamos a los elementos correspondientes de la fila 1 de A .

$$(F_2(-2) + F_1)(A) = \begin{bmatrix} 1 + (0)(-2) & -1 + (0)(-2) & 2 + (1)(-2) \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

Ahora, para calcular $(F_3(\frac{1}{2}) + F_2)(A)$ multiplicamos cada elemento de la fila 3 de la matriz A por $\frac{1}{2}$ y los resultados se suman con los elementos correspondientes de la fila 2 para obtener:

$$(F_3(\frac{1}{2}) + F_2)(A) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ (0)(\frac{1}{2}) + 0 & (2)(\frac{1}{2}) + 0 & (-4)(\frac{1}{2}) + 1 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix} \quad \square$$

19

Calcule la inversa de las siguientes matrices usando operaciones elementales

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix}$

b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

Solución:

a) La matriz ampliada $(A \mid I)$ en este caso es

$$(A \mid I) = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Transformemos la matriz A en la matriz idéntica mediante operaciones elementales y efectuemos al mismo tiempo las mismas operaciones elementales sobre la idéntica de orden 3.

$$(A \mid I) = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim F_{23} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

$$\sim F_2(1/2) \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \sim F_3(2)+F_2; F_3(-2)+F_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \sim F_2(1)+F_1 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

De lo anterior concluimos que $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Siempre es posible comprobar que el resultado obtenido es el correcto multiplicando la matriz dada por la inversa calculada lo que debe dar la idéntica. En efecto

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \square$$

b) Para $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ se tiene que la ampliada es:

$$(B \mid I) = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim F_1(-2)+F_2$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \end{array} \right] \sim F_2(-1/3) \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & -1/3 \end{array} \right] \sim F_2(-2)+F_1$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & 2/3 & -1/3 \end{array} \right]$$

De lo anterior se concluye que $B^{-1} = \begin{bmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{bmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

Comprobemos que el resultado obtenido es el correcto.

$$B^{-1} \cdot B = -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \square$$

c) La matriz ampliada $(C \mid I)$ en este caso es

$$(C \mid I) = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Debemos, mediante operaciones elementales, obtener la idéntica donde aparece la matriz C , y a la vez debemos realizar las mismas operaciones elementales sobre la idéntica.

$$(C \mid I) = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\sim F_1(1/2) \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/2 & -1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\sim F_1(-1)+F_2; F_1(-3)+F_3 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/2 & -1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 3/2 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 3/2 & 9/2 & -3/2 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\sim F_2(2) \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/2 & -1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3/2 & 9/2 & -3/2 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\sim F_2(-3/2)+F_3 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/2 & -1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 1 \end{array} \right]$$

En este punto observamos que la tercera fila se ha hecho igual a la nula, esto muestra que es imposible transformar la matriz C en la idéntica como se pretendía; a partir de esto podemos decir que la inversa de C no existe o de forma equivalente la matriz C no posee inversa. $\square$

Se dice que una matriz cuadrada A es *ortogonal* ssi $A^{-1} = A^T$, que es lo mismo que escribir A es *ortogonal* ssi $A A^T = I$.

Muestre que

$$A = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & 0 & \sin(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}$$

es ortogonal, utilizando operaciones elementales.

Solución:

Calculemos la inversa de A usando operaciones elementales

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \cos(\alpha) & 0 & \sin(\alpha) & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow F_1\left(\frac{1}{\cos(\alpha)}\right), \text{ con } \cos(\alpha) \neq 0$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} & \frac{1}{\cos(\alpha)} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow F_1(\sin(\alpha)) + F_3, \text{ con } \sin(\alpha) \neq 0$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} & \frac{1}{\cos(\alpha)} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sin^2(\alpha)}{\cos(\alpha)} + \cos(\alpha) & \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} & 0 & 1 \end{array} \right) =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} & \frac{1}{\cos(\alpha)} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha)}{\cos(\alpha)} & \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} & 0 & 1 \end{array} \right) =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} & \frac{1}{\cos(\alpha)} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\cos(\alpha)} & \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow F_3(\cos(\alpha))$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} & \frac{1}{\cos(\alpha)} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{array} \right) \rightarrow F_3(-\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}) + F_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{\sin^2(\alpha)}{\cos(\alpha)} + \frac{1}{\cos(\alpha)} & 0 & -\sin(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{array} \right) =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1-\sin^2(\alpha)}{\cos(\alpha)} & 0 & -\sin(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{array} \right) =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{\cos^2(\alpha)}{\cos(\alpha)} & 0 & -\sin(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{array} \right) =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \cos(\alpha) & 0 & -\sin(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{array} \right)$$

De lo anterior, se tiene que $A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & 0 & -\sin(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{pmatrix} = A^T$

Por lo tanto, A es ortogonal.

En el desarrollo anterior, hemos supuesto que $\cos(\alpha) \neq 0$ y $\sin(\alpha) \neq 0$, pero notemos que

a) si $\sin(\alpha) = 0$, entonces $\cos(\alpha) = 1$ ó $\cos(\alpha) = -1$, es decir, la matriz original sería $A = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & 0 & \sin(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ que es ortogonal, o sería $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ que también es ortogonal.

Tarea: Verifique que las matrices obtenidas son ortogonales.

b) si $\cos(\alpha) = 0$, entonces $\sin(\alpha) = 1$ ó $\sin(\alpha) = -1$, es decir, la matriz original sería $A = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & 0 & \sin(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ que es ortogonal pues

$$AA^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

o sería $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ que también es ortogonal, pues

$$AA^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tarea: Verifique que las matrices obtenidas son ortogonales.

Lo anterior muestra que $A = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & 0 & \sin(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$ es ortogonal para cualquier valor $\alpha \in \mathbb{R}$ $\square$

23

Sea $R(\beta) = \begin{pmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix}$.

Calcule:

a) $R(\beta_1) R(\beta_2)$

b) $R(\beta_1 + \beta_2)$

c) $R(\beta_1) + R(\beta_2)$

d) $[R(\beta)]^2$

Solución:

$$\begin{aligned} \text{a) } R(\beta_1) R(\beta_2) &= \begin{pmatrix} \cos(\beta_1) & -\sin(\beta_1) \\ \sin(\beta_1) & \cos(\beta_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\beta_2) & -\sin(\beta_2) \\ \sin(\beta_2) & \cos(\beta_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\beta_1)\cos(\beta_2) - \sin(\beta_1)\sin(\beta_2) & -\cos(\beta_1)\sin(\beta_2) - \sin(\beta_1)\cos(\beta_2) \\ \sin(\beta_1)\cos(\beta_2) + \cos(\beta_1)\sin(\beta_2) & -\sin(\beta_1)\sin(\beta_2) + \cos(\beta_1)\cos(\beta_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\beta_1 + \beta_2) & -\sin(\beta_1 + \beta_2) \\ \sin(\beta_1 + \beta_2) & \cos(\beta_1 + \beta_2) \end{pmatrix} = R(\beta_1 + \beta_2) \quad \square \end{aligned}$$

b) $R(\beta_1 + \beta_2) = R(\beta_1) R(\beta_2)$, por lo anterior. $\square$

$$\begin{aligned} \text{c) } R(\beta_1) + R(\beta_2) &= \begin{pmatrix} \cos(\beta_1) & -\sin(\beta_1) \\ \sin(\beta_1) & \cos(\beta_1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(\beta_2) & -\sin(\beta_2) \\ \sin(\beta_2) & \cos(\beta_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\beta_1) + \cos(\beta_2) & -\sin(\beta_1) - \sin(\beta_2) \\ \sin(\beta_1) + \sin(\beta_2) & \cos(\beta_1) + \cos(\beta_2) \end{pmatrix} \quad \square \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } [R(\beta)]^2 &= \begin{pmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2(\beta) - \sin^2(\beta) & -2\cos(\beta)\sin(\beta) \\ 2\sin(\beta)\cos(\beta) & -\sin^2(\beta) + \cos^2(\beta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(2\beta) & -\sin(2\beta) \\ \sin(2\beta) & \cos(2\beta) \end{pmatrix} = R(2\beta) \quad \square \end{aligned}$$

24

Obtenga todas las matrices que conmuten en $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ con $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Solución:

Recordemos que dos matrices A y B conmutan cuando $AB = BA$

Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Luego

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 2c & b + 2d \\ 3a + 4c & 3b + 4d \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 3b & 2a + 4b \\ c + 3d & 2c + 4d \end{pmatrix}$$

Igualando las matrices anteriores, se tiene:

$$AB = BA \Rightarrow \begin{pmatrix} a + 2c & b + 2d \\ 3a + 4c & 3b + 4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 3b & 2a + 4b \\ c + 3d & 2c + 4d \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$a + 2c = a + 3b \Rightarrow 2c = 3b \quad (1)$$

$$b + 2d = 2a + 4b \Rightarrow 2a + 3b - 2d = 0 \quad (2)$$

$$3a + 4c = c + 3d \Rightarrow 3a + 3c - 3d = 0 \quad (3)$$

$$3b + 4d = 2c + 4d \Rightarrow 3b = 2c \quad (4)$$

Observamos que las ecuaciones (1) y (4) nos entregan la misma información, es decir, $b = \frac{2}{3}c$. Reemplazando esto en (2), se tiene:

$$2a + 2c - 2d = 0 \Rightarrow a + c - d = 0 \quad (5)$$

Observamos que (5) es equivalente a (3), luego $d = a + c$

Finalmente, las matrices que conmutan con $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ son de la forma

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & \frac{2}{3}c \\ c & a + c \end{pmatrix}, \text{ con } a, c \in \mathbb{R}$$

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -i & 1-i^2 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Obtenga las siguientes matrices:

a) A^t

b) $\left[(F_1(-1) + F_2) + F_{21} \right](A)$

c) $-(1+i) \cdot A$

d) $[F_1(-3)(A)] \cdot I^t$

Solución:

Tenemos que $i^2 = -1$, por tanto $A = \begin{pmatrix} 1 & -i & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -i & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\left[(F_1(-1) + F_2) + F_{21} \right](A) =$

$$\begin{pmatrix} 1 & -i & 2 \\ -1 & 1+i & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -i & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1-i & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

c) $-(1+i) \cdot A = -(1+i) \cdot \begin{pmatrix} 1 & -i & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} -(1+i) & i-1 & -2(1+i) \\ 0 & -(1+i) & 2(1+i) \\ 1+i & -(1+i) & 0 \end{pmatrix}$$

$$d) [F_1(-3)] I^t = F_1(-3) = \begin{pmatrix} -3 & 3i & -6 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \square$$

30

Muestre que la inversa de una matriz triangular superior de orden 3, cuando existe, es siempre triangular superior.

Solución:

$$\text{Sea } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

Usemos operaciones elementales para calcular la inversa si esta existe.

Supongamos que $a_{11} \neq 0$, $a_{22} \neq 0$ y $a_{33} \neq 0$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow F_1\left(\frac{1}{a_{11}}\right); F_2\left(\frac{1}{a_{22}}\right); F_3\left(\frac{1}{a_{33}}\right)$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & a_{12}/a_{11} & a_{13}/a_{11} & 1/a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_{23}/a_{22} & 0 & 1/a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/a_{33} \end{array} \right] \rightarrow F_3\left(-\frac{a_{23}}{a_{22}}\right) + F_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & a_{12}/a_{11} & a_{13}/a_{11} & 1/a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/a_{22} & -a_{23}/(a_{22} a_{33}) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/a_{33} \end{array} \right] \rightarrow F_3\left(-\frac{a_{13}}{a_{11}}\right) + F_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & a_{12}/a_{11} & 0 & 1/a_{11} & 0 & -a_{13}/(a_{11} a_{33}) \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/a_{22} & -a_{23}/(a_{22} a_{33}) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/a_{33} \end{array} \right] \rightarrow F_2\left(-\frac{a_{12}}{a_{11}}\right) + F_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/a_{11} & -a_{12}/(a_{11}a_{22}) & (a_{23}a_{12} - a_{13}a_{22})/(a_{11}a_{22}a_{33}) \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/a_{22} & -a_{23}/(a_{22}a_{33}) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/a_{33} \end{array} \right]$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/a_{11} & -a_{12}/(a_{11}a_{22}) & (a_{23}a_{12} - a_{13}a_{22})/(a_{11}a_{22}a_{33}) \\ 0 & 1/a_{22} & -a_{23}/(a_{22}a_{33}) \\ 0 & 0 & 1/a_{33} \end{bmatrix}$$

Notamos que A^{-1} es efectivamente triangular superior, si $a_{11} \neq 0$, $a_{22} \neq 0$ y $a_{33} \neq 0$. $\square$

31

a) Recordemos que a_{ii} , $i = 1, 2, 3, \dots, n$ indica cuáles son los elementos que están en la diagonal principal de una matriz $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Escriba expresiones generales que muestren cuáles son los elementos que están en la superdiagonal, en la subdiagonal y en la diagonal secundaria.

b) Si $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, entonces escriba una fórmula para calcular la suma de los elementos de una fila cualquiera de la matriz.

Solución:

a) Superdiagonal : $a_{i,i+1}$, $i = 1, 2, 3, \dots, n-1$

Subdiagonal : $a_{i,i-1}$, $i = 2, 3, \dots, n$

Diagonal Secundaria : $a_{i,n-i+1}$, $i = 1, 2, 3, \dots, n$

b) $\sum_{j=1}^n a_{ij}$, $i = 1, 2, 3, \dots, n$ $\square$

Dadas las matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $D = \begin{bmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 1 & d \end{bmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$, $d \in \mathbb{R}$, calcule:

a) $D^2 \cdot A^T$

b) $(D^{-1})^T + (D^T)^{-1} - aA$

Solución:

$$a) D = \begin{bmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 1 & d \end{bmatrix} \Rightarrow D^2 = \begin{bmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 1 & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 1 & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d^2 & 0 & 0 \\ 0 & d^2 & 0 \\ 0 & 2d & d^2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore D^2 \cdot A^T = \begin{bmatrix} d^2 & 0 & 0 \\ 0 & d^2 & 0 \\ 0 & 2d & d^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T =$$

$$\begin{bmatrix} d^2 & 0 & 0 \\ 0 & d^2 & 0 \\ 0 & 2d & d^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d^2 & 0 & 0 \\ d^2 a & d^2 & 0 \\ 2da & 2d + d^2 a & d^2 \end{bmatrix}$$

b) Calculemos D^{-1} usando operaciones elementales.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} d & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & d & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{F_1(\frac{1}{d}); F_2(\frac{1}{d}); d \neq 0} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{d} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{d} & 0 \\ 0 & 1 & d & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{F_2(-1)+F_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{d} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{d} & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 & -\frac{1}{d} & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{F_3(\frac{1}{d})} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{d} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{d} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{d^2} & \frac{1}{d} \end{array} \right]$$

$$\therefore D^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{d} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{d} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{d^2} & \frac{1}{d} \end{bmatrix}, d \neq 0$$

Notemos que si $d = 0$, entonces D^{-1} no existe.

Por otro lado, $(D^{-1})^T = (D^T)^{-1}$, por lo tanto:

$$(D^{-1})^T + (D^T)^{-1} - aA = (D^{-1})^T + (D^{-1})^T - aA = 2(D^{-1})^T - aA =$$

$$2 \begin{bmatrix} \frac{1}{d} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{d} & -\frac{1}{d^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{d} \end{bmatrix} - a \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{d} - a & -a^2 & 0 \\ 0 & \frac{2}{d} - a & -\frac{2}{d^2} - a^2 \\ 0 & 0 & \frac{2}{d} - a \end{bmatrix} \quad \square$$

33

Calcule, usando operaciones elementales, la inversa de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Solución:

$$\begin{aligned} (A : I) &= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{F_1(-3)+F_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{F_2(\frac{1}{5})} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{F_2(-1)+F_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 1 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{F_3(\frac{5}{4})} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{5}{4} \end{array} \right] \xrightarrow{F_3(-\frac{1}{5})+F_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{5}{4} \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{F_2(2)+F_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{5}{4} \end{array} \right] \end{aligned}$$

Finalmente, la inversa de $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ es

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{5}{4} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -2 & 2 & -2 \\ -3 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 5 \end{bmatrix} \quad \square$$

34

Sea $A \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ dada por

$$a_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{(i+j)} & , i+j > 2 \\ 0 & , i+j \leq 2 \end{cases}$$

a) Obtenga A

b) Verifique si $3A - 3A^T$ es antisimétrica

c) Calcule $[(10A \cdot A^T)]^{-1}$

d) Averigue si $A^{-1} \cdot (A^{-1})^T \cdot A^T \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Solución:

$$a) A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{1+2} \\ \frac{1}{2+1} & \frac{1}{2+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \quad \square$$

b) De a) se observa que A es simétrica, es decir, $A^T = A$.

Luego, $3A - 3A^T = 3(A - A^T) = 3\Theta = \Theta = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, es efectivamente antisimétrica $\square$

$$\begin{aligned}
c) 10A &= 10 \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{10}{3} \\ \frac{10}{3} & \frac{10}{4} \end{bmatrix}; \quad A^T = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \\
(10A \cdot A^T) &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{10}{3} \\ \frac{10}{3} & \frac{10}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{10}{9} & \frac{10}{12} \\ \frac{10}{12} & \frac{125}{72} \end{bmatrix} \\
[(10A \cdot A^T)]^{-1} &= \frac{1}{\frac{625}{324} - \frac{25}{36}} \begin{bmatrix} \frac{125}{72} & -\frac{10}{12} \\ -\frac{10}{12} & \frac{10}{9} \end{bmatrix} = \frac{81}{100} \begin{bmatrix} \frac{125}{72} & -\frac{10}{12} \\ -\frac{10}{12} & \frac{10}{9} \end{bmatrix} = \\
&\begin{bmatrix} \frac{45}{32} & -\frac{27}{40} \\ -\frac{27}{40} & \frac{9}{10} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

En este ejercicio también se podría haber usado la propiedad Inv5)

$$(\alpha AA^T)^{-1} = \alpha^{-1} (AA^T)^{-1} = \frac{1}{\alpha} (AA^T)^{-1}, \text{ con } \alpha \neq 0, \text{ en } \boxed{27} \quad \square$$

$$\begin{aligned}
d) A^{-1} \cdot (A^{-1})^T \cdot A^T \cdot A &= A^{-1} \cdot [(A^T)^{-1} \cdot A^T] \cdot A = A^{-1} \cdot I \cdot A = \\
A^{-1} \cdot A &= I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \square
\end{aligned}$$

35

Muestre que si $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, con $a_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{i \cdot j} & , \text{ si } |i - j| < 2 \\ 0 & , \text{ en caso contrario} \end{cases}$, entonces $(A^T)^2$ es simétrica.

Solución:

Calculemos A

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

Observamos que A es simétrica, luego

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

Calculemos $(A^T)^2$

$$(A^T)^2 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & \frac{5}{8} & \frac{1}{12} \\ \frac{5}{8} & \frac{49}{144} & \frac{13}{216} \\ \frac{1}{12} & \frac{13}{216} & \frac{13}{324} \end{pmatrix}$$

Finalmente, se ha mostrado que $(A^T)^2$ es simétrica $\square$

36

Muestre que si $A = L D L^T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donde L y D son matrices de órdenes apropiados y además D es una matriz diagonal, entonces A es simétrica.

Solución:

Usando $\square$ 23 y $\square$ 24, se tiene que

$$A^T = (L D L^T)^T = (L^T)^T (L D)^T = L D^T L^T = L D L^T = A, \text{ pues } D^T = D \text{ y } (XY)^T = Y^T X^T$$

Lo anterior muestra que si $A = L D L^T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donde L es una matriz triangular inferior y D es una matriz diagonal, entonces A es simétrica. $\square$

Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$, exprese simbólicamente lo

siguiente :

- Los elementos de la diagonal secundaria.
- La suma de los elementos de la superdiagonal.
- El promedio de los elementos de cada columna.
- Generalice los resultados anteriores para una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$

Solución:

a) Observe que los elementos de la diagonal secundaria son $a_{14}, a_{23}, a_{32}, a_{41}$, es decir, a_{ij} con $i + j = 5$, o equivalentemente $a_{i, 5-i}$, $i = 1, 2, 3, 4$ $\square$

b) Los elementos de la superdiagonal son a_{12}, a_{23}, a_{34} , es decir,

$a_{i, i+1}$, $i = 1, 2, 3$ luego la suma de estos elementos será $\sum_{i=1}^3 a_{i, i+1}$ $\square$

c) Sea p_j el promedio de la columna j . Así, tenemos que

$$p_j = \frac{\sum_{i=1}^4 a_{ij}}{4}, \quad j = 1, 2, 3, 4 \quad \square$$

d) La generalización está dada por :

* $a_{i, 5-i}$, $i = 1, 2, 3, \dots, n$

* $\sum_{i=1}^{n-1} a_{i, i+1}$

* $p_j = \frac{\sum_{i=1}^n a_{ij}}{n}$, $j = 1, 2, 3, \dots, n$ $\square$

38

Muestre que si $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, entonces la segunda fila de $(A^3)^{-1}$ es distinta de la nula

Solución:

$$A^3 = A \cdot A \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Luego

$$(A^3)^{-1} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Observamos que la segunda fila de $(A^3)^{-1}$ es $[0 \quad -1] \neq [0 \quad 0]$ $\square$

39

Muestre que si A y B son ortogonales, entonces AB también lo es.

Solución:

Tenemos que A es ortogonal, es decir, $A^T = A^{-1}$

Además, B es ortogonal, es decir, $B^T = B^{-1}$

Luego : $(AB)^T = B^T A^T = B^{-1} A^{-1} = (AB)^{-1}$

Lo anterior muestra que si A y B son ortogonales, entonces AB también lo es. $\square$

40

Verifique si $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ es ortogonal

Solución:

Una matriz es ortogonal cuando $A^T = A^{-1}$, o lo que es lo mismo $A^T A = I$, resultado este último que usaremos para verificar si la matriz es ortogonal o no.

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 6 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esto muestra que $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ no es ortogonal

Observación: Al ser el elemento en la posición (1,1) igual a $2 \neq 1$, el producto no es igual a la matriz idéntica de orden 3, por lo que es innecesario calcular el producto completo. $\square$

41

Sean $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ donde

$$a_{ij} = \frac{i-j}{i+j}, \quad i = 1, 2; \quad j = 1, 2, 3$$

$$b_{ij} = \frac{i-j}{2^{i+j}}, \quad i = 1, 2; \quad j = 1, 2, 3$$

Calcule :

$$a) \quad -\frac{1}{2} A + \left(\frac{3}{2}\right)^3 B$$

$$b) \quad A - B + 3(B - A)$$

Solución:

Tenemos que:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1-1}{1+1} & \frac{1-2}{1+2} & \frac{1-3}{1+3} \\ \frac{2-1}{2+1} & \frac{2-2}{2+2} & \frac{2-3}{2+3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{3} & \frac{-2}{4} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{-1}{5} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1-1}{2^{1+1}} & \frac{1-2}{2^{1+2}} & \frac{1-3}{2^{1+3}} \\ \frac{2-1}{2^{2+1}} & \frac{2-2}{2^{2+2}} & \frac{2-3}{2^{2+3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{2^3} & \frac{-2}{2^4} \\ \frac{1}{2^3} & 0 & \frac{-1}{2^5} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2^3} & -\frac{1}{2^3} \\ \frac{1}{2^3} & 0 & -\frac{1}{2^5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & 0 & -\frac{1}{32} \end{pmatrix}$$

$$a) -\frac{1}{2}A + \left(\frac{3}{2}\right)^3 B =$$

$$-\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} + \left(\frac{3}{2}\right)^3 \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2^3} & -\frac{1}{2^3} \\ \frac{1}{2^3} & 0 & -\frac{1}{2^5} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{10} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\frac{3^3}{2^6} & -\frac{3^3}{2^6} \\ \frac{3^3}{2^6} & 0 & -\frac{3^3}{2^8} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{10} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\frac{27}{64} & -\frac{27}{64} \\ \frac{27}{64} & 0 & -\frac{27}{256} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{6} - \frac{27}{64} & \frac{1}{4} - \frac{27}{64} \\ -\frac{1}{6} + \frac{27}{64} & 0 & \frac{1}{10} - \frac{27}{256} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{49}{192} & -\frac{11}{64} \\ \frac{49}{192} & 0 & -\frac{7}{1280} \end{pmatrix}$$

$$\text{Finalmente, } -\frac{1}{2}A + \left(\frac{3}{2}\right)^3 B = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{49}{192} & -\frac{11}{64} \\ \frac{49}{192} & 0 & -\frac{7}{1280} \end{pmatrix} \quad \square$$

$$b) A - B + 3(B - A) = A - B + 3B - 3A = 2B - 2A = 2(B - A)$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \left[\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & 0 & -\frac{1}{32} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \right] \\
&= 2 \left[\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{8} + \frac{1}{3} & -\frac{1}{8} + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{8} - \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{32} + \frac{1}{5} \end{pmatrix} \right] \\
&= 2 \left[\begin{pmatrix} 0 & \frac{5}{24} & \frac{3}{8} \\ -\frac{5}{24} & 0 & \frac{27}{160} \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & \frac{5}{12} & \frac{3}{4} \\ -\frac{5}{12} & 0 & \frac{27}{80} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Finalmente, $A - B + 3(B - A) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{5}{12} & \frac{3}{4} \\ -\frac{5}{12} & 0 & \frac{27}{80} \end{pmatrix} \quad \square$

44

Calcule $A_f^{-1}(x)$, usando operaciones elementales, donde

$$A_f(x) = \begin{bmatrix} f(x) & f'(x) & f''(x) \\ f'(x) & f(x) & f'''(x) \\ f''(x) & f'''(x) & f(x) \end{bmatrix}$$

para $f(x) = -2x + 1$.

¿Existe $A_f^{-1}(1)$?

Solución:

Si $f(x) = -2x + 1$, entonces $f'(x) = -2$ y $f''(x) = f'''(x) = 0$

Luego

$$A_f(x) = \begin{bmatrix} f(x) & f'(x) & f''(x) \\ f'(x) & f(x) & f'''(x) \\ f''(x) & f'''(x) & f(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x + 1 & -2 & 0 \\ -2 & -2x + 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2x + 1 \end{bmatrix}$$

Usemos operaciones elementales, para calcular $A_f^{-1}(x)$

Notemos que $-2x + 1$ debe ser distinto de cero ($x \neq 1/2$), porque de lo contrario, tendríamos una fila completa de ceros en la matriz $A_f(x)$, y sería imposible trasformarla en una fila de la idéntica.

$$(A_f^{-1}(x) | I) =$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -2x+1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2x+1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2x+1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow F_1(1/(-2x+1)); -2x+1 \neq 0$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{2}{2x-1} & 0 & \frac{1}{-2x+1} & 0 & 0 \\ -2 & -2x+1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2x+1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow F_1(2)+F_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{2}{2x-1} & 0 & \frac{1}{-2x+1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{2x-1} + (-2x+1) & 0 & \frac{2}{-2x+1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2x+1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] =$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{2}{2x-1} & 0 & \frac{1}{-2x+1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-4x^2+4x+3}{2x-1} & 0 & \frac{2}{-2x+1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2x+1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow F_2((2x-1)/(-4x^2+4x+3)); -4x^2+4x+3 \neq 0$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{2}{2x-1} & 0 & \frac{1}{-2x+1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{4x^2-4x-3} & \frac{1-2x}{4x^2-4x-3} & 0 \\ 0 & 0 & -2x+1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow F_3(1/(-2x+1))$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{2}{2x-1} & 0 & \frac{1}{-2x+1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{4x^2-4x-3} & \frac{1-2x}{4x^2-4x-3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{-2x+1} \end{array} \right] \rightarrow F_2(-\frac{2}{2x-1})+F_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1-2x}{4x^2-4x-3} & \frac{2}{4x^2-4x-3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{4x^2-4x-3} & \frac{1-2x}{4x^2-4x-3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{-2x+1} \end{array} \right]$$

En el desarrollo anterior, para no dividir por cero, se debe considerar la restricción adicional $3 + 4x - 4x^2 \neq 0$

$$-4x^2 + 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16+48}}{-8} \Rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{64}}{-8} \Rightarrow x = \frac{-4 \pm 8}{-8}$$

$$\Rightarrow x = \begin{cases} \frac{-4+8}{-8} = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2} \\ \frac{-4-8}{-8} = \frac{-12}{-8} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Lo anterior muestra que x debe ser distinta de $-\frac{1}{2}$ y de $\frac{3}{2}$

Notemos que en el desarrollo anterior, hemos hecho uso de lo siguiente:

$$4x^2 - 4x - 3 = (2x - 3)(2x + 1)$$

y

$$-4x^2 + 4x - 1 = -(2x - 1)(2x - 1)$$

$$\text{Finalmente, } A_f^{-1}(x) = \begin{bmatrix} \frac{1-2x}{4x^2-4x-3} & \frac{2}{4x^2-4x-3} & 0 \\ \frac{2}{4x^2-4x-3} & \frac{1-2x}{4x^2-4x-3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{-2x+1} \end{bmatrix},$$

para $x \neq \frac{1}{2}$, $x \neq -\frac{1}{2}$ y $x \neq \frac{3}{2}$

$$\text{Notamos que } A_f^{-1}(1) \text{ existe, pues } A_f^{-1}(1) = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \square$$

47

$$\text{Si } X = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ x_3 & 1 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ x_n & 1 \end{pmatrix}_{n \times 2} \quad \text{y} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{pmatrix}_{n \times 1}, \text{ entonces calcule:}$$

a) $X^T X$

b) $X^T Y$

Solución:

$$\begin{aligned} a) \quad X^T X &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdot & \cdot & \cdot & x_n \\ 1 & 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ x_3 & 1 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ x_n & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2 & x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n \\ x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n & 1 + 1 + 1 + \dots + 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & n \end{pmatrix} \quad \square \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \quad X^T Y &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdot & \cdot & \cdot & x_n \\ 1 & 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + \dots + x_n y_n \\ y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ \sum_{i=1}^n y_i \end{pmatrix} \quad \square \end{aligned}$$

48

Si $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, entonces obtenga A , usando operaciones elementales.

Solución:

Usando operaciones elementales, se tiene:

$$(A^{-1} | I) = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow F_{13} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\rightarrow F_1(-2)+F_2 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \rightarrow F_2(1)+F_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 1 & -2 \end{array} \right] \rightarrow F_3(-1/3) \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{array} \right]$$

$$\rightarrow F_3(3)+F_2 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{array} \right] \rightarrow F_3(-1)+F_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{array} \right]$$

Finalmente, $(A^{-1})^{-1} = A = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$ $\square$

Muestre que si A es una matriz cuadrada tal que $A + \frac{1}{2}I$ y $A - \frac{1}{2}I$ son ambas ortogonales, entonces A es antisimétrica.

Solución:

Recordemos que una matriz J es ortogonal cuando $J \cdot J^T = I$.

Dado que la matriz $A + \frac{1}{2}I$ es ortogonal se tiene que:

$$(A + \frac{1}{2}I)(A + \frac{1}{2}I)^T = I \Rightarrow (A + \frac{1}{2}I)(A^T + \frac{1}{2}I) = I \Rightarrow$$

$$A \cdot A^T + \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}A^T + \frac{1}{4}I = I \quad (1)$$

Ahora, dado que la matriz $A - \frac{1}{2}I$ es ortogonal se tiene que:

$$(A - \frac{1}{2}I)(A - \frac{1}{2}I)^T = I \Rightarrow (A - \frac{1}{2}I)(A^T - \frac{1}{2}I) = I \Rightarrow$$

$$A \cdot A^T - \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}A^T + \frac{1}{4}I = I \quad (2)$$

Igualando las expresiones que aparecen a la izquierda en (1) y (2), dado que ambas son iguales a la idéntica I , se tiene que

:

$$A \cdot A^T + \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}A^T + \frac{1}{4}I = A \cdot A^T - \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}A^T + \frac{1}{4}I \Rightarrow$$

$$A + A^T = \Theta \Rightarrow A^T = -A$$

Esto último muestra que A es antisimétrica. $\square$

RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS NO RESUELTOS DE MATRICES

[20] a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 4 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{4} \\ 8 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$

b) $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{134} & \frac{6}{67} & \frac{5}{67} \\ -\frac{1008}{67} & -\frac{816}{67} & \frac{660}{67} \\ -\frac{1320}{67} & -\frac{1260}{67} & \frac{960}{67} \end{bmatrix}$

c) A no es triangular, ni superior ni inferior.

[21] a) $A^3 - 3B^2 + 10I_3 = \begin{bmatrix} 68 & -3 & -3 \\ 13 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

b) B es invertible y $B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

c) $(A \cdot B)^T = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \end{bmatrix} = B^T \cdot A^T$

[25] $(A \cdot B)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -1 \end{pmatrix} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

[26]

$$a) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$b) A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 9 & -3 \end{bmatrix}$$

$$c) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$d) A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$e) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f) A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$g) A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$$

[27]

La suma de dos matrices triangular superior de orden n es triangular superior de orden n

El producto de dos matrices triangular superior de orden n es triangular superior de orden n

La suma de dos matrices diagonales de orden n es diagonal de orden n

El producto de dos matrices diagonales de orden n es diagonal de orden n

La suma de dos matrices escalares de orden n es escalar de orden n

El producto de dos matrices escalares de orden n es escalar de orden n

[28]

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 4i & -1-i \\ -\frac{3}{4} + \frac{5}{4}i & -\frac{3}{2} - \frac{5}{2}i \end{bmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 1+i & \frac{1}{4} + \frac{9}{4}i \\ 1+5i & -\frac{5}{2} + \frac{1}{2}i \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 3i & -\frac{7}{4} + \frac{1}{4}i \\ \frac{1}{4} + \frac{7}{4}i & -\frac{1}{8}i \end{bmatrix}$$

$$B^2 = \begin{bmatrix} 3 - \frac{1}{2}i & \frac{5}{2} - \frac{3}{2}i \\ \frac{1}{2} + \frac{13}{2}i & -3 - 2i \end{bmatrix}$$

$$(A+B)^2 = \begin{bmatrix} 4 + \frac{15}{2}i & 0 \\ 1 + \frac{29}{2}i & -\frac{56}{8} - \frac{33}{8}i \end{bmatrix}$$

$$(A-B)^2 = \begin{bmatrix} 2 - \frac{5}{2}i & \frac{3}{2} - \frac{5}{2}i \\ \frac{1}{2} + 2i & 1 - \frac{1}{8}i \end{bmatrix}$$

$$(i-1)A = \begin{bmatrix} -2 & -1-i \\ -1+i & -\frac{3}{2}i \end{bmatrix}$$

[42] a) $3A = \begin{bmatrix} 0 & -9 & -12 \\ -9 & -12 & -15 \end{bmatrix}$

b) $\frac{1}{2}(A \cdot A^T) = \begin{bmatrix} \frac{25}{2} & 16 \\ 16 & 25 \end{bmatrix}$

[43] $(A^T)^{-1} \cdot B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{7} & -\frac{6}{7} & -1 \\ -\frac{2}{7} & \frac{5}{14} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{14} & -\frac{2}{7} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

[45] $\left[(5A-3B) \cdot (B+2A)\right]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{13}{147} & -\frac{41}{588} \\ -\frac{8}{245} & \frac{29}{980} \end{bmatrix}$

[46] $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

GUÍA DE PRÁCTICO N°2

DETERMINANTES

Teoría Determinantes

T 35 **Determinantes**

El *determinante* de una matriz cuadrada $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, denotado $|A|$ ó $\det(A)$, es un número real o complejo que se obtiene de la siguiente manera:

$$|A| = \begin{cases} a_{11} & , \text{ si } n = 1 \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} c_{ij} & , \text{ si } n \geq 2, \text{ para algún } i \text{ desde } 1 \text{ hasta } n \end{cases}$$

donde $c_{ij} = (-1)^{i+j} |A_{ij}|$, con A_{ij} la matriz que se obtiene de A eliminando la fila i – ésima y la columna j – ésima.

T 36 A la definición **T** 35 es necesario agregar algunos comentarios importantes :

a) Si la matriz posee elementos reales, entonces el determinante de tal matriz será un número real y de forma similar si la matriz posee elementos complejos, entonces su determinante será un número complejo.

b) El valor que asume i en la definición es elegido de tal manera que el cálculo del determinante sea "más sencillo", es decir, elegiremos una fila con una mayor cantidad de ceros, si es que la hay; o una fila en donde aparezcan números enteros con los cuales sea fácil multiplicar. Si no observamos una fila que sea más fácil de trabajar que otra, elegimos cualquiera.

Se puede demostrar que no importando la fila elegida el valor del determinante siempre es el mismo para una matriz dada.

c) El número c_{ij} se denomina *cofactor o complemento algebraico* del elemento a_{ij}

El determinante $M_{ij} = |A_{ij}|$ se denomina *menor del elemento* a_{ij}

37 Regla de Sarrus

Ya sabemos cómo calcular el determinante de una matriz de orden 2, pero ¿cómo se calcula el determinante de una matriz de orden 3?

Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, entonces

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{33}a_{12}a_{21}$$

¿No existirá una forma más fácil de calcular el determinante de una matriz de orden tres?. Efectivamente existe y se llama *regla de Sarrus*.

Bueno, Sarrus notó que si repetía las dos primeras columnas de la matriz al final de ésta obtenía lo siguiente

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

¿Y qué pasó?. Lo que pasa es que con esto obtenemos tres diagonales principales (aquellas que van desde la esquina superior izquierda a la esquina inferior derecha) y tres diagonales secundarias (aquellas que van desde la esquina superior derecha a la esquina inferior izquierda). Gráficamente:

Tres diagonales principales

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

Tres diagonales secundarias

$$\begin{array}{ccccc}
 a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\
 a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\
 a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32}
 \end{array}$$

¿Y qué hago ahora?. Si miramos la definición dada al inicio observamos que los productos de los elementos de las diagonales principales coinciden con los productos que van con signo positivo, y los productos de los elementos de las diagonales secundarias coinciden con los productos que van con signo negativo. Y esa es precisamente la regla de Sarrus.

En resumen, la regla de Sarrus dice: adiciona a la matriz cuadrada de orden 3 las primeras dos columnas al final de la matriz, y luego multiplica los elementos de las diagonales, manteniendo el signo de los productos de las diagonales principales y cambiando el signo de los productos de las diagonales secundarias. Finalmente, el determinante de la matriz dada es la suma de todos los productos obtenidos.

Es importante recordar que la regla de Sarrus sirve sólo para matrices de orden 3.

T 38 Propiedades del Determinante

Sean A y B matrices cuadradas de orden n con elementos reales, y α un escalar real.

Det1) $|A| = |A^T|$

El determinante de una matriz y de su traspuesta son iguales.

Det2) $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

El determinante de un producto de matrices es igual al producto del determinante de cada uno de los factores.

Det3) $B = F_{ij}(A) \Rightarrow |B| = -|A|$

Si hacemos un intercambio de filas (o de columnas) en una matriz, entonces su determinante cambia de signo.

Det4) $B = F_i(\alpha)(A) \Rightarrow |B| = \alpha |A|$, con $\alpha \neq 0$

Si multiplicamos una fila (o una columna) en una matriz por un escalar no nulo, entonces el determinante de la matriz resultante es el producto del escalar por el determinante de la matriz original.

Det5) $B = (F_i(\alpha) + F_j)(A) \Rightarrow |B| = |A|$, con $\alpha \neq 0$

Si multiplicamos una fila (o una columna) de una matriz por un escalar no nulo y el resultado se lo sumamos a otra fila (o columna) de la misma matriz, entonces el determinante de la matriz resultante es igual al determinante de la matriz original.

Det6) $A = (a_{ij})$ triangular $\Rightarrow |A| = \prod_{i=1}^n a_{ii} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}$

El determinante de una matriz triangular es igual al producto de los elementos de la diagonal principal.

Det7) $|\alpha \cdot A| = \alpha^n |A|$, con $\alpha \in \mathbb{R}$

El determinante de una matriz multiplicada por un escalar es igual al escalar elevado al orden de la matriz por el determinante de la matriz original.

Det8) Si una matriz posee una fila (o una columna) nula, entonces su determinante es cero.

Det9) Si una matriz posee dos filas (o columnas) iguales, entonces su determinante es cero.

Det10) Si una matriz posee una fila (o una columna) que es múltiplo escalar de otra fila (o columna), entonces su determinante es cero.

Det11) A^{-1} existe $\Leftrightarrow |A| \neq 0$

La inversa de una matriz existe si y solo si su determinante es distinto de cero.

Det12) $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$, para $|A| \neq 0$

El determinante de la inversa de una matriz es igual al inverso multiplicativo del determinante de la matriz original, siempre que tal determinante sea distinto de cero para asegurar la existencia de la inversa.

T 39 Método de la Adjunta

Hasta ahora habíamos usado la definición y el método de las operaciones elementales para calcular la inversa de una matriz. A continuación agregamos un método que es muy útil especialmente para matrices de orden 3, el llamado *Método de la Adjunta*.

El Método de la Adjunta se basa en el siguiente resultado :

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj(A)$$

donde $Adj(A)$ es la matriz llamada adjunta de A , con $Adj(A) = (c_{ij})^T$, donde los elementos c_{ij} son los cofactores de la matriz A , mencionados en la definición de determinante, es decir $c_{ij} = (-1)^{i+j} |A_{ij}|$, con A_{ij} la matriz que se obtiene de A eliminando la fila i -ésima y la columna j -ésima

Note que la inversa existe sólo cuando $|A| \neq 0$, por lo que siempre que se quiera calcular la inversa de una matriz deberemos en primer lugar calcular su determinante para ver si es distinto de cero. En caso de que el determinante sea cero, la inversa no existe, por lo tanto no tiene sentido calcularla.

Para el caso $n = 2$, es decir, una matriz cuadrada de orden 2, la adjunta escrita en forma general es

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} \\ c_{12} & c_{22} \end{pmatrix}$$

y para el caso $n = 3$ la adjunta escrita en forma general es

$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{pmatrix}$$

con $c_{ij} = (-1)^{i+j} |A_{ij}|$,

y $|A_{ij}|$ el determinante de la submatriz cuadrada que se obtiene de A eliminando la fila i y la columna j .

EJERCICIOS DETERMINANTES

[1] Calcule, usando la definición, el determinante de las siguientes matrices

a) $A = (-4)$

b) $B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

c) $H = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}; a, b, c, d \in \mathbb{R}$

d) $G = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

e) $J = \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & -i \end{bmatrix}$, con i la unidad imaginaria.

[2] Use la regla de Sarrus para calcular el determinante de la matriz

$$J = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

[3] Obtenga los siguientes determinantes :

a) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

$$b) \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$c) \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 9 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 8 \end{vmatrix}$$

$$d) \begin{vmatrix} 3\cos(\alpha) & 3\sen(\alpha) \\ -3\sen(\alpha) & 3\cos(\alpha) \end{vmatrix}, \text{ con } \alpha \in \mathbb{R}$$

[4] Usando el método de la adjunta calcule la inversa de

$$a) A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$b) A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$c) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$d) A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

[5] Determine el valor o los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$, de modo que $|A| = 1$, para

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sen(\alpha) \\ 1 & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

[6] Muestre que la inversa de $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 6 \end{bmatrix}$ posee elemento igual a -1 en la posición $(1,3)$.

[7] Si $\frac{dA(t)}{dt} = \left(\frac{da_{ij}(t)}{dt}\right)$, entonces calcule $\left[\frac{dA(t)}{dt}\right]^{-1}$, si existe, para

$$A(t) = \begin{pmatrix} t & 1 & t^2 \\ 1 & 0 & t \\ -t^2 & 1 & t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

Observación: La derivada de una matriz es la matriz formada por las derivadas de cada uno de los elementos de ésta.

[8] Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcule:

a) $|A^{10}|$

b) $|5A^{-1}|$

c) $|(A^t)^{-1} + (A^{-1})^t|$

d) $A - 2A + Adj(A) \cdot A$

[9] Muestre que si A es una matriz cuadrada de orden 3, tal que $a_{ij} = \begin{cases} -1 & , \text{ si } i \leq j \\ 1 & , \text{ si } i > j \end{cases}$ entonces $(A \cdot A^T)$ posee inversa.

[10] Muestre que todas las matrices escalares de orden 3, distintas de la nula, poseen inversa.

[11] Resuelva la ecuación $|A| = 3$ con $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & a \\ -1 & a & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$

[12] Muestre que si $R = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, entonces $|R \cdot R^T + 3I| > 0$

[13] Muestre que la matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 \\ a_0^2 & a_1^2 & a_2^2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ es invertible si $a_0 \neq a_1 \neq a_2$

[14] Muestre que : $|A| = 4 \Rightarrow |2(A^T \cdot I_n \cdot A^{-1})^{-1}| = 2^n$, para $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

[15] Determine si es verdad lo siguiente:

$$\det(P \cdot M) = \frac{1}{4}, \text{ si } P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

[16] Calcule $\det \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & 0 \\ 5 & -4 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 4 & 6 & 8 & 7 \end{bmatrix}$

[17] Muestre que es falsa la siguiente afirmación : "No existen matrices antisimétricas que sean ortogonales."

[18] Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$

Calcule :

a) $|A^T \cdot A^{-1}| + 3 \cdot |2A|$

b) $A^{-1} - 2A$

[19] Muestre que no existen matrices cuadradas de orden 3 con determinante igual a 1, que sean antisimétricas.

[20] Usando operaciones elementales, calcule $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 9 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 8 \end{vmatrix}$

[21] Si $|A| = -1$, y se realizan las siguientes operaciones: invierto, luego intercambio las filas 1 y 10, luego traspongo, luego multiplico la fila 1 por -1 , y finalmente sumo 5 veces la fila 3 a la 11. Entonces muestre que el determinante de la matriz obtenida es -1 .

[22] Calcule el determinante de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$, usando operaciones elementales.

[23] Muestre que todas las matrices antisimétricas de orden 2, distintas de la nula, poseen inversa

[24] $P = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow (P^3)^{-1}$ existe, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

[25] Determine el (los) valor (es) de k tal que $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & k \\ 3 & -1 & 1 \\ 5 & 3k & -5 \end{bmatrix}$ sea singular

[26] a) Obtenga una matriz $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tal que $|A| = -1$ y $\text{Traza}(A) = 3$.
b) Sean $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tales que $|A| = -1$ y $|B| = -\frac{1}{2}$. Calcule $|2 \cdot A^T \cdot B^{-1}|$

[27] Sea $A \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ dada por

$$a_{ij} = \begin{cases} a & , i + j > 2 \\ 1 & , i + j \leq 2 \end{cases}$$

con $a \in \mathbb{R} - \{0\}$

a) Obtenga A

b) Verifique si $3A - 3A^T$ es antisimétrica

c) Calcule $[(aA \cdot A^T)]^{-1}$

d) Verifique si $A^{-1} \cdot (A^{-1})^T \cdot A^T \cdot A = \begin{bmatrix} a & -1 \\ 0 & a \end{bmatrix}$

[28] Sea $F(x) = \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) \end{vmatrix}$, con f_{ij} funciones continuas y con primera derivada continua, en un intervalo I .

Muestre que : $\frac{dF(x)}{dx} = \begin{vmatrix} f'_{11}(x) & f_{12}(x) \\ f'_{21}(x) & f_{22}(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f'_{12}(x) \\ f_{21}(x) & f'_{22}(x) \end{vmatrix}$

[29] Si $A = \begin{pmatrix} 1-x & 1 \\ x & x \end{pmatrix}$ y $|A| = -2$, entonces calcule x

[30] Sea $A = \begin{pmatrix} x & x & -1 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & x & 0 \\ -2 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

a) Calcule $\det(A)$

b) Obtenga el o los valores de x tal que $\det(A) = x^3 + 2x^2 + 3x - 2$

[31] a) Calcule el determinante de $A = \begin{bmatrix} x & -1 & x & -2 & 5 \\ 0 & x & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, usando la

definición de determinante

b) Determine el o los valores de x de modo que $\det(A) = x^3 - 14x^2 - x + 2$

[32] a) Si $A \in \mathcal{M}_{4 \times 4}(\mathbb{R})$ y $\det(A) = -2$, calcule:

i) $|A A^T|$ ii) $|-3 A^{-1}|$ iii) $\left| \frac{1}{4} A^3 \right|$

b) Calcule el determinante de $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 7 & 100 \\ 2 & 5 & 1 & 2 & 200 \\ 4 & 8 & 12 & 16 & 20 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 8 & 0 \end{bmatrix}$, usando propiedades del determinante.

[33] Muestre que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es invertible, entonces $|Adj(A)| = |A|^{n-1}$

[34] Obtenga el o los valores de t de modo que :

$$\begin{vmatrix} t & 0 & 0 & -4 & 2 \\ -4 & t & 0 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & t & t & 0 \\ 0 & t & -2 & 2 & t \end{vmatrix} = 0$$

[35] Sea $R = \begin{pmatrix} \cos(z) & \sen(z) \\ \sen(z) & \cos(z) \end{pmatrix}$. Resuelva las ecuaciones:

a) $|R| = 0$ b) $\det(R) = 1$ c) $|R| = -\frac{1}{2}$

[36] Obtenga $\det(S)$ para

a) $S = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ b) $S = \begin{pmatrix} ab & b^2 \\ -a^2 & -ab \end{pmatrix}$ c) $S = \begin{bmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{bmatrix}$

[37] Considerando $D = \begin{pmatrix} -3-\alpha & 6 \\ -9 & 12-\alpha \end{pmatrix}$, resuelva la ecuación $|D| = 0$

PROBLEMAS RESUELTOS DETERMINANTES

1

Calcule, usando la definición, el determinante de las siguientes matrices :

a) $A = (-4)$

b) $B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

c) $H = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}; a, b, c, d \in \mathbb{R}$

d) $G = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

e) $J = \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & -i \end{bmatrix}$, con i la unidad imaginaria.

Solución:

a) $A = (-4)$

En este caso $n = 1$ y por tanto usamos la rama superior de la definición.

$$|A| = a_{11} = -4$$

No confundir el determinante de una matriz con el valor absoluto de un número real, aunque sus notaciones sean iguales. Esta es la razón porque algunos prefieren usar la notación $\det(A)$ en vez de $|A|$, pero si tenemos claro qué representa el argumento no nos confundiremos. $\square$

$$b) B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

En este caso $n = 2$, por lo que debemos usar la rama inferior de la definición.

$$|B| = \sum_{j=1}^2 a_{ij} c_{ij}$$

En este punto debemos elegir una fila para calcular el determinante, pero como no existe diferencia entre ambas filas, desde el punto de vista de la aparición de ceros, optemos por trabajar el determinante usando la primera fila, es decir, $i = 1$.

$$|B| = \sum_{j=1}^2 a_{1j} c_{1j} = a_{11} c_{11} + a_{12} c_{12} \quad (*)$$

Calculemos los cofactores.

$$c_{11} = (-1)^{1+1} |B_{11}| = |1| = 1$$

$$c_{12} = (-1)^{1+2} |B_{12}| = -|2| = -2$$

Reemplazando estos valores en la expresión (*) se tiene que :

$$|B| = a_{11} c_{11} + a_{12} c_{12} = 1 \cdot 1 + (-3) \cdot (-2) = 1 + 6 = 7$$

Finalmente : $|B| = 7$ $\square$

$$c) H = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}; a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

Usemos la segunda fila para calcular el determinante, es decir, $i = 2$.
(Como ejercicio calcule el determinante usando la primera fila).

$$|H| = \sum_{j=1}^2 h_{2j} c_{2j} = h_{21} c_{21} + h_{22} c_{22} \quad (**)$$

Calculemos los cofactores :

$$c_{21} = (-1)^{2+1} |H_{21}| = -|b| = -b$$

$$c_{22} = (-1)^{2+2} |H_{22}| = |a| = a$$

Reemplazando estos valores en la expresión (**) se tiene que :

$$|H| = h_{21} c_{21} + h_{22} c_{22} = c \cdot (-b) + d \cdot a = ad - bc$$

Finalmente : $|H| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

Lo anterior muestra que para calcular el determinante de una matriz cuadrada de orden 2 se deben multiplicar los elementos de la diagonal principal y a tal resultado restarle el producto de los elementos de la diagonal secundaria. $\square$

$$d) G = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

En este caso $n = 3$. Por otro lado, elegiremos la tercera fila ($i = 3$) porque aparece un 0 en la posición (3, 2), esto redundará en que no deberemos calcular el cofactor c_{32} porque cualquier número multiplicado por cero es cero.

$$|G| = \sum_{j=1}^3 g_{3j} c_{3j} = g_{31} c_{31} + g_{32} c_{32} + g_{33} c_{33} = 3 c_{31} + 0 c_{32} + 3 c_{33} =$$

$$3 c_{31} + 3 c_{33} \quad (***)$$

Calculemos los cofactores :

$$c_{31} = (-1)^{3+1} |G_{31}| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2$$

$$c_{33} = (-1)^{3+3} |G_{33}| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1$$

Reemplazando los valores de los cofactores en la expresión (**) se tiene que :

$$|G| = 3 c_{31} + 3 c_{33} = 3 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 6 + 3 = 9$$

Finalmente : $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 9 \quad \square$

e) $J = \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & -i \end{bmatrix}$, con i la unidad imaginaria.

De la parte c) de este ejercicio sabemos que $|H| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

Luego, usando la fórmula anterior, se tiene que :

$$|J| = \begin{vmatrix} 1 & i \\ i & -i \end{vmatrix} = 1 \cdot (-i) - i \cdot i = -i - i^2 = -i - (-1) = 1 - i$$

Finalmente : $\begin{vmatrix} 1 & i \\ i & -i \end{vmatrix} = 1 - i$ $\square$

2

Use la regla de Sarrus para calcular el determinante de la matriz

$$J = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Solución:

Repitamos las dos primeras columnas de la matriz al final de ésta.

$$\begin{array}{ccccc} 1 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}$$

Veamos cuáles son las diagonales principales :

$$\begin{array}{ccccc} 1 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}$$

La suma de los productos, en este caso, es:

$$P_p = (1)(2)(-1) + (-1)(3)(1) + (2)(0)(0) = -2 - 3 = -5$$

Las diagonales secundarias :

$$\begin{array}{ccccc} 1 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}$$

La suma de los productos de las diagonales secundarias es:

$$P_s = -(2)(2)(1) - (1)(3)(0) - (-1)(0)(-1) = -4$$

Luego el determinante de la matriz J es

$$|J| = P_p + P_s = -5 + (-4) = -9$$

Finalmente : $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -9 \quad \square$

3

Obtenga los siguientes determinantes :

a) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 9 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 8 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 3\cos(\alpha) & 3\sin(\alpha) \\ -3\sin(\alpha) & 3\cos(\alpha) \end{vmatrix}, \text{ con } \alpha \in \mathbb{R}$

Solución:

a) Para calcular el determinante $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ podríamos haber ocupado la

regla de Sarrus, pero si observamos bien nos damos cuenta que la segunda fila es igual a la primera multiplicada por 2, y de acuerdo a la propiedad **Det10)**

concluimos que $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

Finalmente : $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ $\square$

b) En el caso del determinante $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ observamos que la tercera columna

es nula, por tanto, usando la propiedad **Det8)**, se tiene que $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$.

Finalmente : $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$ $\square$

c) Para calcular el determinante $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 9 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 8 \end{vmatrix}$ usaremos operaciones

elementales para transformar la matriz original en una matriz triangular. Notemos que la matriz es de orden 4 y por tanto no se puede ocupar la regla de Sarrus.

Triangularicemos para después calcular el determinante.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 9 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow F_1(-2)+F_3 \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow F_1(-3)+F_4$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -1 & 2 \\ 0 & -7 & -11 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2(-5)+F_3} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -16 & -18 \\ 0 & -7 & -11 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2(-7)+F_4}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -16 & -18 \\ 0 & 0 & -32 & -26 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3(-2)+F_4} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -16 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

Como hemos ocupado solamente operaciones elementales del tercer tipo (multiplicar una fila por un escalar no nulo y sumar el resultado a otra fila), entonces el determinante de la matriz original es igual al determinante de la matriz triangular.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 9 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -16 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 1(-1)(-16)(10) = 160$$

Finalmente : $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 9 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 160$

El método usado en este ejercicio para calcular el determinante es usado comúnmente cuando se trabaja con matrices de orden superior, es decir, con matrices de orden 4 hacia arriba. $\square$

d) $\begin{vmatrix} 3\cos(\alpha) & 3\sen(\alpha) \\ -3\sen(\alpha) & 3\cos(\alpha) \end{vmatrix}, \text{ con } \alpha \in \mathbb{R}$

Para calcular el determinante dado podemos usar la propiedad **Det7)** porque en cada elemento de la matriz aparece un factor repetido que es 3. Luego

$$\begin{vmatrix} 3\cos(\alpha) & 3\sen(\alpha) \\ -3\sen(\alpha) & 3\cos(\alpha) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 \cdot \cos(\alpha) & 3 \cdot \sen(\alpha) \\ 3 \cdot (-\sen(\alpha)) & 3 \cdot \cos(\alpha) \end{vmatrix} =$$

$$3^2 \begin{vmatrix} \cos(\alpha) & \sen(\alpha) \\ -\sen(\alpha) & \cos(\alpha) \end{vmatrix} = 9 [\cos^2(\alpha) + \sen^2(\alpha)] = 9$$

Finalmente : $\begin{vmatrix} 3\cos(\alpha) & 3\sen(\alpha) \\ -3\sen(\alpha) & 3\cos(\alpha) \end{vmatrix} = 9, \text{ con } \alpha \in \mathbb{R} \quad \square$

Usando el método de la adjunta calcule la inversa de

$$a) A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$b) A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$c) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$d) A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Solución:

a) Calculemos, en primer lugar, el determinante de A .

$$|A| = (1)(5) - (-1)(2) = 5 + 2 = 7 \neq 0$$

De lo anterior, podemos decir que la inversa de A existe porque su determinante es distinto de cero.

Calculemos $Adj(A) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} \\ c_{12} & c_{22} \end{pmatrix}$, donde $c_{ij} = (-1)^{i+j} |A_{ij}|$, $i = 1, 2$; $j = 1, 2$

$$c_{11} = (-1)^{1+1} |A_{11}| = |5| = 5$$

Recuerde que A_{11} es la matriz que se obtiene de A eliminando la fila 1 y la columna 1.

$$c_{21} = (-1)^{2+1} |A_{21}| = -|-1| = 1$$

Recuerde que A_{21} es la matriz que se obtiene de A eliminando la fila 2 y la columna 1.

Finalmente

$$c_{12} = (-1)^{1+2} |A_{12}| = -|2| = -2$$

$$c_{22} = (-1)^{2+2} |A_{22}| = |1| = 1$$

$$\text{Por lo tanto, } Adj(A) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} \\ c_{12} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

y se tiene que la inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ es

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj(A) = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

$$\text{Finalmente : } \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix} \quad \square$$

b) Calculemos el determinante de A .

$$|A| = ad - bc$$

Observemos que el determinante será distinto de cero si $ad \neq bc$, por lo tanto supondremos esto en lo que sigue.

Calculemos la matriz adjunta.

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} \\ c_{12} & c_{22} \end{pmatrix}$$

con

$$c_{11} = (-1)^{1+1} |A_{11}| = |d| = d$$

$$c_{21} = (-1)^{2+1} |A_{21}| = -|b| = -b$$

$$c_{12} = (-1)^{1+2} |A_{12}| = -|c| = -c$$

$$c_{22} = (-1)^{2+2} |A_{22}| = |a| = a$$

$$\text{Por lo tanto, } Adj(A) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} \\ c_{12} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

y se tiene que la inversa de $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ es

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{Adj}(A) = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Finalmente : $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, con $ad - bc \neq 0$ $\square$

c) Calculemos el determinante de A .

$$|A| = (1)(0)(2) + (2)(1)(0) + (-3)(-1)(3)$$

$$- (3)(0)(0) - (2)(-3)(2) - (1)(1)(-1) = 9 + 12 + 1 = 22 \neq 0$$

Calculemos la matriz adjunta.

$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{pmatrix}$$

con

$$c_{11} = (-1)^{1+1} |A_{11}| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

$$c_{21} = (-1)^{2+1} |A_{21}| = - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = - (4 + 3) = -7$$

$$c_{31} = (-1)^{3+1} |A_{31}| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$c_{12} = (-1)^{1+2} |A_{12}| = - \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = - (-6) = 6$$

$$c_{22} = (-1)^{2+2} |A_{22}| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

$$c_{32} = (-1)^{3+2} |A_{32}| = - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = - (1 + 9) = -10$$

$$c_{13} = (-1)^{1+3} |A_{13}| = \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 3$$

$$c_{23} = (-1)^{2+3} |A_{23}| = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = - (-1) = 1$$

$$c_{33} = (-1)^{3+3} |A_{33}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = 6$$

Por lo tanto, $Adj(A) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -7 & 2 \\ 6 & 2 & -10 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

y se tiene que la inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ es

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj(A) = \frac{1}{22} \begin{pmatrix} 1 & -7 & 2 \\ 6 & 2 & -10 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{22} & -\frac{7}{22} & \frac{2}{22} \\ \frac{6}{22} & \frac{2}{22} & -\frac{10}{22} \\ \frac{3}{22} & \frac{1}{22} & \frac{6}{22} \end{pmatrix}$$

Finalmente : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{22} & -\frac{7}{22} & \frac{2}{22} \\ \frac{6}{22} & \frac{2}{22} & -\frac{10}{22} \\ \frac{3}{22} & \frac{1}{22} & \frac{6}{22} \end{pmatrix} \quad \square$

d) Calculemos el determinante de $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{33}a_{12}a_{21}$$

Calculemos la adjunta de A .

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{pmatrix}$$

con

$$c_{11} = (-1)^{1+1} |A_{11}| = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}$$

$$c_{21} = (-1)^{2+1} |A_{21}| = - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - (a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32})$$

$$c_{31} = (-1)^{3+1} |A_{31}| = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}$$

$$c_{12} = (-1)^{1+2} |A_{12}| = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = - (a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31})$$

$$c_{22} = (-1)^{2+2} |A_{22}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}$$

$$c_{32} = (-1)^{3+2} |A_{32}| = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = - (a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21})$$

$$\begin{aligned}
c_{13} &= (-1)^{1+3} |A_{13}| = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31} \\
c_{23} &= (-1)^{2+3} |A_{23}| = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = - (a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}) \\
c_{33} &= (-1)^{3+3} |A_{33}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
Adj(A) &= \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{pmatrix} = \\
&\begin{pmatrix} a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} & - (a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) & a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22} \\ - (a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) & a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} & - (a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}) \\ a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31} & - (a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}) & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

y se tiene que la inversa de $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ es

$$\begin{aligned}
A^{-1} &= \frac{1}{|A|} Adj(A) = \\
&\frac{1}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{33}a_{12}a_{21}} \cdot \\
&\begin{pmatrix} a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} & - (a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) & a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22} \\ - (a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) & a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} & - (a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}) \\ a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31} & - (a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}) & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Finalmente :

$$\begin{aligned}
A^{-1} &= \frac{1}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{33}a_{12}a_{21}} \cdot \\
&\begin{pmatrix} a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} & - (a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) & a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22} \\ - (a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) & a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} & - (a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}) \\ a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31} & - (a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}) & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{pmatrix} \quad \square
\end{aligned}$$

6

Muestre que la inversa de $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 6 \end{bmatrix}$ posee elemento igual a -1 en la posición $(1, 3)$.

Solución:

Recordemos que $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{Adj}(A)$, con $\text{Adj}(A) = (c_{ji})$.

$$|A| = 6 - 9 + 0 - (-6) - 2 - 0 = 12 - 9 - 2 = 12 - 11 = 1$$

$$c_{31} = (-1)^{3+1} |A_{31}| = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 + 2 = -1$$

Por tanto, el elemento $(1, 3)$ de la inversa de A es : $\frac{c_{31}}{|A|} = \frac{-1}{1} = -1$ $\square$

7

Si $\frac{dA(t)}{dt} = \left(\frac{da_{ij}(t)}{dt} \right)$, entonces calcule $\left[\frac{dA(t)}{dt} \right]^{-1}$, si existe, para

$$A(t) = \begin{pmatrix} t & 1 & t^2 \\ 1 & 0 & t \\ -t^2 & 1 & t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

Obs.: La derivada de una matriz es la matriz formada por las derivadas de cada uno de los elementos de ésta.

Solución:

$$A(t) = \begin{pmatrix} t & 1 & t^2 \\ 1 & 0 & t \\ -t^2 & 1 & t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{dA(t)}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2t \\ 0 & 0 & 1 \\ -2t & 0 & 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

Luego, $\left| \frac{dA(t)}{dt} \right| = 0$, pues existe una columna (la segunda) de sólo ceros, y por lo tanto $\left[\frac{dA(t)}{dt} \right]^{-1}$ no existe $\square$

8

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcule:

a) $|A^{10}|$

b) $|5 A^{-1}|$

c) $|(A^t)^{-1} + (A^{-1})^t|$

d) $A - 2A + \text{Adj}(A) \cdot A$

Solución:

Para $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ tenemos que $|A| = 1$

a) $|A^{10}| = |A|^{10} = 1^{10} = 1 \quad \square$

b) $|5 A^{-1}| = 5^2 |A^{-1}| = 25 \frac{1}{|A|} = 25 \quad \square$

c) $|(A^t)^{-1} + (A^{-1})^t| = |(A^t)^{-1} + (A^t)^{-1}| = |2(A^t)^{-1}| = 2^2 |(A^t)^{-1}| =$

$2^2 \frac{1}{|A^t|} = 2^2 \frac{1}{|A|} = 4 \quad \square$

d) $A - 2A + \text{Adj}(A) \cdot A = -A + |A| A^{-1} \cdot A = -A + |A| I =$

$-A + I = -\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Observe que:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{Adj}(A) \Rightarrow \text{Adj}(A) = |A| A^{-1} \quad \square$$

9

Muestre que si A es una matriz cuadrada de orden 3, tal que

$$a_{ij} = \begin{cases} -1 & , \text{ si } i \leq j \\ 1 & , \text{ si } i > j \end{cases}$$

entonces $(A \cdot A^T)$ posee inversa.

Solución:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(A \cdot A^T) = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$|(A \cdot A^T)| = 27 - 1 - 1 - 3 - 3 - 3 = 27 - 11 = 16 \neq 0$$

Dado que el determinante de la matriz $A \cdot A^T$ es distinto de cero, concluimos que $(A \cdot A^T)$ posee inversa. $\square$

10

Muestre que todas las matrices escalares de orden 3, distintas de la nula, poseen inversa.

Solución:

$E = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$ representa a todas las matrices escalares de orden 3 distintas de la nula si $k \neq 0$

Ahora

$$|E| = \begin{vmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{vmatrix} = k^3 \neq 0, \text{ pues } k \neq 0$$

De lo anterior, concluimos que E posee inversa porque su determinante es distinto de cero.

Finalmente, podemos decir que todas las matrices escalares de orden 3, distintas de la nula, poseen inversa. $\square$

11

Resuelva la ecuación $|A| = 3$ con $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & a \\ -1 & a & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$

Solución:

Triangularicemos la matriz A usando operaciones elementales.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & a \\ -1 & a & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_{13}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & a & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & a \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1(1)+F_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1+a & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & a \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_{24}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & a \\ 0 & 1+a & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2(-1)+F_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & a-1 \\ 0 & 1+a & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2(-1-a)+F_4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & a-1 \\ 0 & 0 & -1-a & -2-a \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3(-(1+a)/2)+F_4}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & a-1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}a^2 - a - \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

$$\therefore |A| = -2\left(-\frac{1}{2}a^2 - a - \frac{3}{2}\right) = a^2 + 2a + 3$$

Finalmente resolvamos la ecuación $|A| = 3$:

$$|A| = 3 \Rightarrow a^2 + 2a + 3 = 3 \Rightarrow a^2 + 2a = 0 \Rightarrow a(a+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = -2 \end{cases}$$

Concluimos que los valores de a que hacen que $\det(A) = 3$ son $a = -2$ y $a = 0$. $\square$

12

Muestre que si $R = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, entonces $|R \cdot R^T + 3I| > 0$

Solución:

Calculemos $R \cdot R^T$

$$R \cdot R^T = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot [1 \quad -1] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Calculemos $3I$

$$3I = 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Luego

$$R \cdot R^T + 3I = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Finalmente,

$$|R \cdot R^T + 3I| = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 16 - 1 = 15 > 0 \quad \square$$

13

Muestre que la matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 \\ a_0^2 & a_1^2 & a_2^2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ es invertible si $a_0 \neq a_1 \neq a_2$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 \\ a_0^2 & a_1^2 & a_2^2 \end{vmatrix} = a_1 a_2^2 + a_2 a_0^2 + a_0 a_1^2 - a_1 a_0^2 - a_2 a_1^2 - a_0 a_2^2 =$$

$a_1(a_2^2 - a_0^2) + a_0(a_1^2 - a_2^2) + a_2(a_0^2 - a_1^2) \neq 0$, pues $a_0 \neq a_1 \neq a_2$ y al menos dos de estas constantes es distinta de cero, además $a_i^2 - a_j^2 \neq 0$, para $i \neq j$. $\square$

14

Muestre que : $|A| = 4 \Rightarrow |2(A^T \cdot I_n \cdot A^{-1})^{-1}| = 2^n$, para $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Solución:

Usando las propiedades **Det1)**, **Det2)**, **Det7)** y **Det12)** de $\square$ 38, se tiene que

$$|2(A^T \cdot I_n \cdot A^{-1})^{-1}| = 2^n |(A^T \cdot I_n \cdot A^{-1})^{-1}| = 2^n \frac{1}{|A^T \cdot I_n \cdot A^{-1}|} = 2^n \frac{1}{|A^T| |I_n| |A^{-1}|} =$$

$$2^n \frac{1}{|A| \cdot 1 \cdot |A^{-1}|} = 2^n \frac{1}{|A| \frac{1}{|A|}} = 2^n \frac{1}{4 \frac{1}{4}} = 2^n$$

Hemos mostrado que: $|A| = 4 \Rightarrow |2(A^T \cdot I_n \cdot A^{-1})^{-1}| = 2^n$, para $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ $\square$

18

Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$

Calcule :

a) $|A^T \cdot A^{-1}| + 3 \cdot |2A|$

b) $A^{-1} - 2A$

Solución:

En primer lugar es conveniente calcular el determinante de A , porque de ese modo podemos saber si posee inversa.

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 0 + 14 - 12 + 5 - 0 + 18 = 25$$

Dado que $|A| \neq 0$, A posee inversa.

$$a) |A^T \cdot A^{-1}| + 3|2A| = |A^T| |A^{-1}| + (3)(2^3) |A| = |A| \frac{1}{|A|} + (3)(2^3) |A| =$$

$$1 + 24|A| = 1 + 24(25) = 601$$

b) Calculemos A^{-1} usando operaciones elementales.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{F_{13}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{F_1(-3)+F_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 & : & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -7 & 16 & : & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & : & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow F_2(-1/7)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 & : & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -16/7 & : & 0 & -1/7 & 3/7 \\ 0 & 2 & -1 & : & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow F_2(-2)+F_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 & : & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -16/7 & : & 0 & -1/7 & 3/7 \\ 0 & 0 & 25/7 & : & 1 & 2/7 & -6/7 \end{bmatrix} \rightarrow F_3(7/25)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 & : & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -16/7 & : & 0 & -1/7 & 3/7 \\ 0 & 0 & 1 & : & 7/25 & 2/25 & -6/25 \end{bmatrix} \rightarrow F_3(16/7)+F_2; F_3(3)+F_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & : & 21/25 & 6/25 & 7/25 \\ 0 & 1 & 0 & : & 16/25 & 1/25 & -3/25 \\ 0 & 0 & 1 & : & 7/25 & 2/25 & -6/25 \end{bmatrix} \rightarrow F_2(-4)+F_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & : & -43/25 & 2/25 & 19/25 \\ 0 & 1 & 0 & : & 16/25 & 1/25 & -3/25 \\ 0 & 0 & 1 & : & 7/25 & 2/25 & -6/25 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^{-1} = \begin{bmatrix} -43/25 & 2/25 & 19/25 \\ 16/25 & 1/25 & -3/25 \\ 7/25 & 2/25 & -6/25 \end{bmatrix}$$

Luego :

$$A^{-1} - 2A = \begin{bmatrix} -43/25 & 2/25 & 19/25 \\ 16/25 & 1/25 & -3/25 \\ 7/25 & 2/25 & -6/25 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & -3 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -43/25 & 2/25 & 19/25 \\ 16/25 & 1/25 & -3/25 \\ 7/25 & 2/25 & -6/25 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 6 & 10 & 14 \\ 2 & 8 & -6 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -43/25 & -98/25 & 69/25 \\ -134/25 & -249/25 & -353/25 \\ -43/25 & -198/25 & 144/25 \end{bmatrix} \quad \square$$

19

Muestre que no existen matrices cuadradas de orden 3 con determinante igual a 1, que sean antisimétricas.

Solución:

Sea $A = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}$ una matriz antisimétrica cualquiera de orden 3, con a, b y c constantes reales cualesquiera.

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix} = 0 - abc + abc - 0 - 0 - 0 = 0$$

Lo anterior muestra que todas las matrices antisimétricas de orden 3 poseen determinante igual a cero, por lo que no existen matrices cuadradas de orden 3 con determinante igual a 1, que sean antisimétricas. $\square$

20

Usando operaciones elementales, calcule $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 9 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 8 \end{vmatrix}$

Solución:

Triangularicemos para después calcular el determinante.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 9 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow_{F_1(-2)+F_3} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow_{F_1(-3)+F_4}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -1 & 2 \\ 0 & -7 & -11 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow_{F_2(-5)+F_3} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -16 & -18 \\ 0 & -7 & -11 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow_{F_2(-7)+F_4}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -16 & -18 \\ 0 & 0 & -32 & -26 \end{bmatrix} \rightarrow_{F_3(-2)+F_4} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -16 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

Como hemos ocupado solamente operaciones elementales del tercer tipo (multiplicar una fila por un escalar no nulo y sumar el resultado a otra fila), entonces el determinante de la matriz original es igual al determinante de la matriz triangular.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 9 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -16 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 1(-1)(-16)(10) = 160 \quad \square$$

21

Si $|A| = -1$, y se realizan las siguientes operaciones: invierto, luego intercambio las filas 1 y 10, luego traspongo, luego multiplico la fila 1 por -1 , y finalmente sumo 5 veces la fila 3 a la 11. Entonces muestre que el determinante de la matriz obtenida es -1 .

Solución:

$$|A| = -1 \Rightarrow \text{invierto } \det = \frac{1}{-1} = -1 \Rightarrow \text{intercambio } \det = -(-1) = 1$$

$$\Rightarrow \text{traspongo } \det = 1 \Rightarrow \text{multiplico por } -1 \det = -1(1) = -1 \Rightarrow F_3(5)+F_{11} \det = -1$$

Finalmente, el determinante de la matriz obtenida es -1 $\square$

Calcule el determinante de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$, usando operaciones elementales.

Solución:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim_{F_1(-a)+F_4, a \neq 0} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1+a & 1 \end{bmatrix} \sim_{F_3(-1)+F_4}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2+a & 1 \end{bmatrix} \sim_{F_2(-\frac{1}{a})+F_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1-\frac{1}{a} & \frac{1}{a} \\ 0 & 0 & 2+a & 1 \end{bmatrix} \sim_{F_3(\frac{(2+a)a}{1+a})+F_4, a \neq -1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1-\frac{1}{a} & \frac{1}{a} \\ 0 & 0 & 0 & 1+\frac{2+a}{1+a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{(1+a)}{a} & \frac{1}{a} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3+2a}{1+a} \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, $|A| = 1(a)\left(-\frac{(1+a)}{a}\right)\left(\frac{3+2a}{1+a}\right) = -(3+2a) = -3-2a$,
 $a \neq 0, a \neq -1$.

Casos especiales:

i) $a = 0$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Luego

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim_{F_{42}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim_{F_2(-1)+F_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\ \sim_{F_3(\frac{1}{2})+F_4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

El determinante en este caso es

$$|A| = -(-2(-\frac{3}{2})) = -3$$

Recuerde que un intercambio de filas produce cambio de signo en el valor del determinante.

$$ii) a = -1$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Luego, usando operaciones elementales, se tiene

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim_{F_1(1)+F_4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim_{F_2(1)+F_4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim_{F_2(1)+F_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim_{F_{34}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{El determinante en este caso es } |A| = -(-1(-1)) = -1$$

Todo lo anterior nos muestra que $|A| = -3 - 2a$, $a \in \mathbb{R}$ $\square$

23

Muestre que todas las matrices antisimétricas de orden 2, distintas de la nula, poseen inversa

Solución:

Tenemos que $A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix}$, con $a \neq 0$ representa a todas las matrices antisimétricas de orden 2, distintas de la nula.

Luego

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{vmatrix} = 0 - (-a)a = a^2 \neq 0, \text{ pues } a \neq 0$$

Esto muestra que todas las matrices antisimétricas de orden 2, distintas de la nula, poseen inversa $\square$

24

$$P = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow (P^3)^{-1} \text{ existe, } \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Solución:

Tenemos que

$$|P| = \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1 \neq 0, \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Lo anterior implica que P^{-1} existe no importando el valor de $\alpha \in \mathbb{R}$

Ahora $(P^3)^{-1} = (P \cdot P \cdot P)^{-1} = P^{-1} \cdot P^{-1} \cdot P^{-1} = (P^{-1})^3$ debe existir también porque los productos involucrados existen.

Recuerde que P es cuadrada de orden 2, y su inversa también es cuadrada de orden 2 $\square$

25

Determine el (los) valor (es) de k tal que $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & k \\ 3 & -1 & 1 \\ 5 & 3k & -5 \end{bmatrix}$ sea singular

Solución:

Recordemos que: A es singular $\Leftrightarrow A^{-1}$ no existe $\Leftrightarrow |A| = 0$

Calculemos el determinante de A e iguálémoslo a cero, para conocer los valores para los cuales la matriz no posee inversa.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & k \\ 3 & -1 & 1 \\ 5 & 3k & -5 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 5 + 10 + 9k^2 + 5k - 3k + 30 = 0 \Rightarrow$$

$$9k^2 + 2k + 45 = 0 \Rightarrow k = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(9)(45)}}{2(9)} \Rightarrow k = \frac{-2 \pm \sqrt{-1616}}{18} \Rightarrow$$

$$k = \frac{-2 \pm 2\sqrt{404}i}{18} \Rightarrow k = \frac{-1 \pm \sqrt{404}i}{9} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = \frac{-1 + \sqrt{404}i}{9} \\ k_2 = \frac{-1 - \sqrt{404}i}{9} \end{cases}$$

Por lo tanto, los valores para los cuales la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & k \\ 3 & -1 & 1 \\ 5 & 3k & -5 \end{bmatrix}$ es singular son $k_1 = \frac{-1 + \sqrt{404}i}{9}$ y $k_2 = \frac{-1 - \sqrt{404}i}{9}$ $\square$

26

a) Obtenga una matriz $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tal que $|A| = -1$ y $\text{Traza}(A) = 3$

b) Sean $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tales que $|A| = -1$ y $|B| = -\frac{1}{2}$.

Calcule $|2 \cdot A^T \cdot B^{-1}|$

Solución:

a) Consideremos, por ejemplo, la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$

Tenemos:

$$|A| = -1 \Rightarrow a^2 - b^2 = -1 \quad (1)$$

$$\text{Traza}(A) = 3 \Rightarrow 2a = 3 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

Reemplazando el valor de a recién obtenido en (1), se tiene:

$$a^2 - b^2 = -1 \Rightarrow \frac{9}{4} - b^2 = -1 \Rightarrow b^2 = \frac{9}{4} + 1 \Rightarrow b^2 = \frac{13}{4} \Rightarrow b = \sqrt{\frac{13}{4}} \Rightarrow$$

$$b = \frac{\sqrt{13}}{2}$$

Por lo tanto, una posible matriz tal que $|A| = -1$ y $\text{Traza}(A) = 3$ es

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{\sqrt{13}}{2} \\ \frac{\sqrt{13}}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \quad \square$$

b) Tenemos que $|A| = -1$ y $|B| = -\frac{1}{2}$, con $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Luego:

$$|2 \cdot A^T \cdot B^{-1}| = 2^n |A^T \cdot B^{-1}| = 2^n |A^T| |B^{-1}| = 2^n |A| |B|^{-1} =$$

$$2^n \frac{|A|}{|B|} = 2^n \frac{-1}{-\frac{1}{2}} = 2^n \cdot 2 = 2^{n+1}$$

Finalmente, $|2 \cdot A^T \cdot B^{-1}| = 2^{n+1} \quad \square$

28

Sea $F(x) = \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) \end{vmatrix}$, con f_{ij} funciones continuas y con primera derivada continua, en un intervalo I .

Muestre que : $\frac{dF(x)}{dx} = \begin{vmatrix} f'_{11}(x) & f_{12}(x) \\ f'_{21}(x) & f_{22}(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f'_{12}(x) \\ f_{21}(x) & f'_{22}(x) \end{vmatrix}$

Solución:

Usando la definición de determinante para una matriz de orden 2, tenemos que

$$F(x) = \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) \end{vmatrix} = f_{11}(x) f_{22}(x) - f_{12}(x) f_{21}(x)$$

Luego

$$F'(x) = f'_{11}(x) f_{22}(x) + f_{11}(x) f'_{22}(x) - f'_{12}(x) f_{21}(x) - f_{12}(x) f'_{21}(x) =$$

$$\left[f'_{11}(x) f_{22}(x) - f_{12}(x) f'_{21}(x) \right] + \left[f_{11}(x) f'_{22}(x) - f'_{12}(x) f_{21}(x) \right] =$$

$$\begin{vmatrix} f'_{11}(x) & f_{12}(x) \\ f'_{21}(x) & f_{22}(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f'_{12}(x) \\ f_{21}(x) & f'_{22}(x) \end{vmatrix}$$

$$\text{Finalmente, } \frac{dF(x)}{dx} = \begin{vmatrix} f'_{11}(x) & f_{12}(x) \\ f'_{21}(x) & f_{22}(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f'_{12}(x) \\ f_{21}(x) & f'_{22}(x) \end{vmatrix} \quad \square$$

33

Muestre que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es invertible, entonces $|Adj(A)| = |A|^{n-1}$

Solución:

Sabemos que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es invertible, entonces $A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj(A)$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{Adj}(A) \Rightarrow \text{Adj}(A) = |A| A^{-1} \Rightarrow |\text{Adj}(A)| = ||A| A^{-1}| \Rightarrow$$

$$|\text{Adj}(A)| = |A|^n |A^{-1}| \Rightarrow |\text{Adj}(A)| = |A|^n \frac{1}{|A|} \Rightarrow |\text{Adj}(A)| = |A|^{n-1} \quad \square$$

RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS NO RESUELTOS DETERMINANTES

[5]

$$\alpha = k\pi, \alpha = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

[15]

$P \cdot M$ no existe, pues P es de orden 3×3 y M es de orden 2×2

[16]

68

[17]

Contraejemplo: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

[27]

a) $\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & a \end{pmatrix}$

b) Sí es antisimétrica

c) $\begin{pmatrix} \frac{2}{a^3-2a^2+a} & \frac{-a-1}{a^4-2a^3+a^2} \\ \frac{-a-1}{a^4-2a^3+a^2} & \frac{a^2+1}{a^5-2a^4+a^3} \end{pmatrix}$

d) No

[29]

$$\pm\sqrt{2}$$

[30]

a) $2x^3 + 2x$

b) $x = -1, x = 1, x = 2$

[31]

a) $3x^3 - 14x^2 - x + 2$

b) $x = \frac{-2-\sqrt{2}}{2}, x = \frac{-2+\sqrt{2}}{2}, x = 2$

[32]

$$a) i) 4 \qquad ii) -\frac{81}{2} \qquad iii) -\frac{27}{256}$$

$$b) 0$$

[34]

$$x = -4 - \sqrt{10}, x = -4 + \sqrt{10}$$

[35]

$$a) x = -\frac{\pi}{4} + k_1\pi, x = \frac{\pi}{4} + k_2\pi, \text{ con } k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$$

$$b) x = k\pi, \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

$$c) x = -\frac{\pi}{3} + k_1\pi, x = \frac{\pi}{3} + k_2\pi, \text{ con } k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$$

[36]

$$a) -8$$

$$b) 0$$

$$c) 2$$

[37]

$$x = 3, x = 6$$

GUÍA DE PRÁCTICO N°3

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Teoría Sistemas de Ecuaciones Lineales

T 40 Sistema de Ecuaciones Lineales

Se define un *sistema de ecuaciones lineales* como el conjunto de ecuaciones con la estructura siguiente :

$$\begin{array}{cccccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

donde a_{ij} , con $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$ son números reales conocidos, al igual que los números b_i , $i = 1, 2, \dots, m$.

A los números desconocidos x_j , $j = 1, 2, \dots, n$ se les denomina *incógnitas*.

T 41 Resolver un sistema de ecuaciones lineales consiste en obtener los valores de las incógnitas que satisfacen todas las ecuaciones.

Observemos que el sistema mencionado en la definición **T** 40 posee m ecuaciones y n incógnitas. Cuando el número de ecuaciones coincide con el número de incógnitas se dice que el *sistema es cuadrado*.

Un *sistema es equivalente* a otro cuando ambos poseen la misma solución o las mismas soluciones.

T 42 **Forma Matricial de un Sistema de Ecuaciones Lineales**

Todos los sistemas de ecuaciones lineales se pueden escribir en *forma matricial* del siguiente modo :

$$A \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

con

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{la matriz de coeficientes}$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{bmatrix} \quad \text{el vector de constantes}$$

y

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{el vector de incógnitas}$$

T 43 Sistema Homogéneo

Un sistema $Ax = b$ cuyo vector de constantes b es nulo, se denomina *sistema homogéneo*, es decir, el sistema $Ax = 0$ es un sistema homogéneo.

T 44 Métodos para Resolver Sistemas de Ecuaciones Lineales Cuadrados

a) Método de Gauss o de Eliminación Gaussiana

Este método consiste en aplicar operaciones elementales a la matriz ampliada $[A \ b]$ asociada a la forma matricial $Ax = b$ de modo que la matriz de coeficientes A sea transformada en una matriz triangular. Es importante destacar que se aplican a la par las mismas operaciones elementales sobre el vector de constantes b , generándose finalmente un sistema equivalente triangular $Tx = c$ que se resuelve usando sustitución regresiva o progresiva dependiendo de si generamos una matriz triangular superior o inferior, respectivamente.

Luego del proceso de triangulación, la *sustitución regresiva* consiste en calcular primero x_n de la última ecuación, después reemplazarla en la penúltima ecuación para calcular x_{n-1} , y así sucesivamente hasta calcular x_1 .

Luego del proceso de triangulación, la *sustitución progresiva* consiste en calcular primero x_1 de la primera ecuación, después reemplazarla en la segunda ecuación para calcular x_2 , y así sucesivamente hasta calcular x_n .

b) Método de Jordan

Este método consiste en aplicar operaciones elementales a la matriz ampliada $[A \ b]$ asociada a la forma matricial $Ax = b$ de modo que la matriz de coeficientes A sea transformada en una matriz diagonal. Es importante destacar que se aplican a la par las mismas operaciones elementales sobre el vector de constantes b , generándose finalmente un sistema equivalente diagonal $Dx = d$ que se resuelve muy fácilmente. Para obtener el sistema diagonal se generan ceros bajo la diagonal principal y sobre la diagonal principal de la matriz de coeficientes, por lo tanto, la primera etapa del Método de Jordan, que es generar ceros bajo la diagonal principal o sobre la

diagonal principal según nuestra elección, coincide exactamente con el Método de Gauss, es decir, el Método de Jordan incluye al Método de Gauss.

c) Método de la Inversa

El Método de la Inversa requiere que el determinante de la matriz de coeficientes A sea distinto de cero, para asegurar la existencia de la inversa de A .

Recordemos que la forma matricial de un sistema de ecuaciones lineales es

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (1)$$

Si premultiplicamos (multiplicamos a izquierda) por A^{-1} de la igualdad (1) se tiene que:

$$A^{-1} \cdot (A\mathbf{x}) = A^{-1} \cdot \mathbf{b} \Rightarrow (A^{-1} \cdot A)\mathbf{x} = A^{-1} \cdot \mathbf{b} \Rightarrow I \cdot \mathbf{x} = A^{-1} \cdot \mathbf{b} \Rightarrow$$

$$\mathbf{x} = A^{-1} \cdot \mathbf{b}$$

De la expresión obtenida notamos que el Método de la Inversa consiste en que para calcular el vector de incógnitas debemos multiplicar la inversa de la matriz de coeficientes por el vector de constantes.

d) Método de Cramer

El Método de Cramer requiere que el determinante de la matriz de coeficientes sea distinto de cero.

Sean x_j , $j = 1, 2, \dots, n$ las n incógnitas del sistema con n ecuaciones $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Sea A_j , con $j = 1, 2, \dots, n$, la matriz que se obtiene de A reemplazando la columna j – ésimas por el vector de constantes $\mathbf{b}$.

El Método de Cramer nos dice que para obtener los valores de las incógnitas debemos usar la fórmula:

$$x_j = \frac{|A_j|}{|A|}, \text{ para } j = 1, 2, 3, \dots, n$$

T 45 Matriz Escalonada

Una matriz A se denomina *matriz escalonada*, o se dice que está en forma escalonada, si se cumplen las dos condiciones siguientes:

- i) Todas las filas nulas, si las hay, están en la parte inferior de la matriz.
- ii) El primer elemento no nulo de una fila está a la derecha del primer elemento no nulo de la fila anterior, o equivalentemente, el número de ceros anteriores al primer elemento no nulo de una fila va aumentando de fila en fila.

Por ejemplo, si $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

entonces A no está en forma escalonada, B no está en forma escalonada y C está escalonada.

T 46 Rango de una Matriz

Sea $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$, y sea $p \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq p \leq \text{mínimo}\{m, n\}$. Se llama *menor de orden p de la matriz A* al determinante de la matriz cuadrada de orden p , que se obtiene de A eliminando $m - p$ filas y $n - p$ columnas.

El *rango de una matriz* es el mayor de los órdenes de los menores no nulos que podemos encontrar en la matriz.

En forma alternativa, podemos decir que el rango de una matriz es el número de filas distintas de la nula, luego que la matriz ha sido escalonada.

El rango de una matriz es cero si y solo si la matriz es nula.

T 47 Clasificación de los Sistemas de Ecuaciones Lineales Rectangulares.

Un sistema de ecuaciones lineales se dice rectangular cuando no necesariamente es cuadrado.

Clasificaremos los sistemas haciendo uso del concepto de rango de una matriz. Esta clasificación recibe el nombre de *Teorema de Rouché-Frobenius*.

Sea $Ax = b$ un sistema de ecuaciones lineales escrito en forma matricial, con n incógnitas. Sean r_A el rango de A y r_{Ab} el rango de la matriz ampliada $(A : b)$

i) Si $r_A = r_{Ab} = n$, entonces el sistema posee sólo una solución. En este caso, se dice que el sistema es *compatible determinado*.

ii) Si $r_A = r_{Ab} < n$, entonces el sistema posee infinitas soluciones. En este caso, se deben fijar $n - r_A$ incógnitas y despejar las restantes incógnitas en términos de las que se fijaron. El sistema, en este caso, se dice que es *compatible indeterminado*.

iii) Si $r_A \neq r_{Ab}$, entonces el sistema no posee soluciones. En este caso, se dice que el sistema es *incompatible*.

EJERCICIOS SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

[1] Escriba, en forma matricial, los siguientes sistemas de ecuaciones lineales :

a)

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= -4 \\ -x + y &= -1 \end{aligned}$$

con x y y incógnitas.

b)

$$\begin{aligned} x_1 - x_4 &= -x_3 \\ x_2 + 2x_4 &= -3x_1 \end{aligned}$$

con x_1, x_2, x_3 y x_4 incógnitas.

c)

$$x - t = \pi x$$

con x y t incógnitas.

[2] Resuelva, usando el Método de Gauss, el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$\begin{aligned} 2x + 3y - z &= 1 \\ x - z &= 0 \\ -x + 2y - 3z &= 6 \end{aligned}$$

[3] Resuelva, usando el Método de Jordan, el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$\begin{aligned}2x + 3y - z &= 1 \\x - z &= 0 \\-x + 2y - 3z &= 6\end{aligned}$$

[4] Resuelva, usando el Método de la Inversa, el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$\begin{aligned}x + y - z &= 1 \\x + 2y - z &= 0 \\-x + y - 3z &= 2\end{aligned}$$

[5] Resuelva, usando el Método de Cramer, el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$\begin{aligned}x + y - z &= 1 \\x + 2y - z &= 0 \\-x + y - 3z &= 2\end{aligned}$$

[6] Calcule el rango de las siguientes matrices:

$$a) A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$b) B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$c) C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -2 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

[7] Clasifique los siguientes sistemas de ecuaciones lineales, de acuerdo al número de soluciones que tenga:

a)

$$\begin{aligned}3x - 2y + z &= 1 \\ x - 4y - z &= 0 \\ -x + 4y + z &= -1\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}2x - y &= 4 \\ x - y &= 1\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}x - 4 &= y + z \\ 4 - x &= 4z\end{aligned}$$

[8] Resuelva el sistema

$$\begin{aligned}3x - 2y + 5z &= 1 \\ x - y + z &= 0\end{aligned}$$

[9] Muestre que si u y v son dos soluciones del sistema homogéneo $Ax = \theta$, entonces $3u - 2v$ es también solución.

[10] Resuelva el siguiente sistema usando Cramer y Jordan :

$$\begin{aligned}2x_1 - 3x_2 + x_3 &= -1 \\ -x_1 + x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 &= 1\end{aligned}$$

[11] Analice la veracidad de la siguiente afirmación:

El sistema $2x - 3y = 1$, $x - 5y = \frac{1}{2}$, tiene como solución al vector $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

[12] Obtenga la solución del sistema

$$\begin{aligned}ax + y - z &= 1 \\x - y + z &= 3 \\3x + 6y - 7z &= 5\end{aligned}$$

usando : a) Gauss b) Jordan , con $a \in \mathbb{R}$

[13] Muestre que si $A = \begin{bmatrix} 1 & -a & 1 \\ a & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{bmatrix}$, con $a \in \mathbb{R}$, entonces el sistema homogéneo asociado posee infinitas soluciones.

[14] Resuelva el sistema

$$y - z = -1 \quad ; \quad 4x + 6 = 5z \quad ; \quad 3x - 2y = -3z - 4$$

usando :

a) Cramer
b) Jordan

[15] Si $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, entonces resuelva el sistema $A \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \mathbf{c} = \mathbf{b}$ usando :

a) El método de Gauss b) El método de Cramer
c) El método de la inversa

[16] Resuelva el sistema

$$\begin{aligned}3x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\x_3 - x_2 &= 5x_1 \\x_2 - x_1 &= 4 - 3x_2\end{aligned}$$

usando Cramer.

[17] Recordemos que un sistema $Ax = b$ es homogéneo si $b = \theta$.

Muestre que el sistema

$$3x_1 - \cos(\pi) - 5x_2 = 1 - 2x_3$$

$$4x_3 - 5x_2 = x_1 - 3x_3$$

es homogéneo, si consideramos x_1 , x_2 y x_3 como incógnitas.

[18] Resuelva el sistema

$$2x - 3y = 2$$

$$x + 5y = -4$$

usando

a) el método de la inversa

b) Cramer

c) Jordan

[19] Dadas las ecuaciones

$$2x - y + z = 1$$

$$x + y + z = 0$$

$$3x - 3z = 6$$

a) Escriba el sistema en forma matricial

b) Calcule el determinante de la matriz de coeficientes

c) Resuelva el sistema usando el método de *Cramer*

d) Resuelva el sistema usando el método de *Gauss*

[20] Analice la veracidad de la afirmación: "Todos los sistemas con 3 ecuaciones y 2 incógnitas poseen infinitas soluciones".

[21] Muestre que el sistema $2x_1 - x_2 + x_3 = 5$; $3x_1 - x_3 = 2$
; $-x_1 + \frac{1}{3}x_3 = a$, con $a \neq 0$, no posee solución

[22] Explique si es verdad o mentira que si $\alpha + \beta = 0$, entonces el sistema

$$\begin{aligned}x + y \cos(\alpha) &= 0 \\x \cos(\alpha) + y + \cos(\beta) z &= 0 \\y \cos(\beta) + z &= 0\end{aligned}$$

no posee solución.

[23] Resuelva el sistema dado, suponiendo que c es constante.

$$\begin{aligned}3x_1 - 4x_2 + x_3 &= 6c \\x_1 - 3c &= 4x_2\end{aligned}$$

[24] Muestre que el sistema

$$\begin{aligned}2x + 3y + z &= 1 \\-\frac{2}{5}x - \frac{3a}{5}y &= a\end{aligned}$$

siempre posee infinitas soluciones, con a constante real.

[25] Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones :

$$\begin{aligned}a) \quad -3x + 4y - 1 &= 2 \\6x - 8y + 3 &= a, \quad a \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b) \quad 4t - 2y + z &= 1 - x \\z + y &= -1 \\x &= t + w\end{aligned}$$

[26] Obtenga los valores de $a \in \mathbb{R}$ tales que el siguiente sistema

$$\begin{aligned}3x_1 - x_2 + a x_3 &= 0 \\x_1 - x_3 &= a + 1 \\-a x_1 + x_2 &= -a\end{aligned}$$

tenga: *i*) única solución, *ii*) infinitas soluciones, *iii*) ninguna solución. Calcule las soluciones en el caso *ii*).

[27] Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones :

$$\begin{aligned} a) \quad & 3x - 2t + 6z = 5 - 3y \\ & 5 - 3t + 8y = -4x + w \\ & \pi x - e y = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \quad & 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ & 3x_2 - 6x_3 = 0 \\ & x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{aligned}$$

[28] Obtenga el(los) valor(es) de a , con $a > 0$, de modo que el sistema

$$\begin{aligned} ax - y &= 0 \\ x - ay &= 0 \end{aligned}$$

posea infinitas soluciones.

[29] Aplique el método de la inversa para resolver el siguiente sistema :

$$\begin{aligned} 3x - 4y + z &= -1 \\ x - y + z &= 4 \\ -x + y &= -3 \end{aligned}$$

[30] Resuelva el sistema

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 &= -x_3 + 1 \\ x_3 - x_2 &= 5x_1 - 6 \\ x_2 + 3x_3 &= 4x_1 - 4 \end{aligned}$$

usando : a) Gauss b) Jordan c) Cramer

[31] Resuelva el sistema

$$2x_1 - 3x_2 + x_3 = -3$$

$$x_1 + 5x_2 - x_3 = 4$$

$$3x_1 - 2x_2 = 1 - x_3$$

usando el método de Cramer

[32] Resuelva el sistema

$$x - 3y + z = 1$$

$$-x - 2y + z = 0$$

$$\frac{1}{2}x - y - z = 2$$

usando el método de Cramer

[33] Sea la matriz $A(x) = \begin{pmatrix} f(x) & f'(x) \\ f''(x) & f'''(x) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, donde f representa una función cualquiera y f', f'', f''' , la primera, segunda y tercera derivada de f respectivamente.

a) Decida si $A(1)$ posee inversa, para $f(x) = x^2 - 2x + 1$.

b) Resuelva el sistema $A(\pi) \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, para $f(x) = \text{sen}(x)$.

PROBLEMAS RESUELTOS SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

1

Escriba, en forma matricial, los siguientes sistemas de ecuaciones lineales :

a)

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= -4 \\ -x + y &= -1 \end{aligned}$$

con x y y incógnitas.

b)

$$\begin{aligned} x_1 - x_4 &= -x_3 \\ x_2 + 2x_4 &= -3x_1 \end{aligned}$$

con x_1, x_2, x_3 y x_4 incógnitas.

c)

$$x - t = \pi x$$

con x y t incógnitas.

Solución:

a)

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= -4 \\ -x + y &= -1 \end{aligned}$$

con x y y incógnitas.

El sistema

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= -4 \\ -x + y &= -1 \end{aligned}$$

está formado por 2 ecuaciones y 2 incógnitas, es decir, es un sistema cuadrado. Escribámoslo en forma matricial.

$$A \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

con

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} ; \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \end{bmatrix} ; \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Adicionalmente podemos considerar distintas formas de escribir el sistema anterior de acuerdo a la disposición de sus elementos.

Si reordenamos las incógnitas, entonces aparece el sistema equivalente :

$$\begin{aligned} -2y + 3x &= -4 \\ y - x &= -1 \end{aligned}$$

cuya expresión matricial es $A \mathbf{x} = \mathbf{b}$

con

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} ; \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \end{bmatrix} ; \mathbf{x} = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$$

Observemos que un cambio en el orden de las incógnitas produce un cambio en las columnas de la matriz de coeficientes.

Si ahora cambiamos el orden de las ecuaciones se obtiene el sistema equivalente :

$$\begin{aligned} -x + y &= -1 \\ 3x - 2y &= -4 \end{aligned}$$

con expresión matricial asociada : $A \mathbf{x} = \mathbf{b}$

$$\text{Donde } A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} ; \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \end{bmatrix} ; \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Observemos que un cambio en el orden de las ecuaciones produce un cambio en las filas de la matriz de coeficientes y también en las filas del vector de constantes. $\square$

b)

$$x_1 - x_4 = -x_3$$

$$x_2 + 2x_4 = -3x_1$$

con x_1, x_2, x_3 y x_4 incógnitas.

Este sistema está formado por 2 ecuaciones y 4 incógnitas.

Reordenando los elementos para que aparezcan de la forma indicada en $\square$ 36, se tiene que :

$$x_1 + x_3 - x_4 = 0$$

$$3x_1 + x_2 + 2x_4 = 0$$

Ahora escribamos este sistema homogéneo en forma matricial.

$$A \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} ; \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} ; \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Notemos que siempre es posible, conocida la forma matricial, escribir el sistema asociado en la forma normal.

$$A \mathbf{x} = \mathbf{b} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 + x_3 - x_4 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$x_1 + x_3 - x_4 = 0$$

$$3x_1 + x_2 + 2x_4 = 0$$

Esto nos permite ver que, un sistema de ecuaciones lineales escrito en la forma normal es equivalente al correspondiente escrito en forma matricial $\square$

c)

$$x - t = \pi x$$

con x y t incógnitas.

Reordenando los elementos, se tiene que :

$$x - \pi x - t = 0 \Rightarrow (1 - \pi) x - t = 0$$

Este sistema está formado por una ecuación y 2 incógnitas. Su forma matricial es $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

con

$$A = [1 - \pi \quad -1] ; \mathbf{b} = [0] ; \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ t \end{bmatrix}$$

Este sistema también es homogéneo, pues su vector de constantes $\mathbf{b}$ es igual al vector nulo. $\square$

2

Resuelva, usando el Método de Gauss, el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$2x + 3y - z = 1$$

$$x - z = 0$$

$$-x + 2y - 3z = 6$$

Solución:

En primer lugar debemos escribir el sistema en forma matricial.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -3 \end{bmatrix} ; \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} ; \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Calculemos el determinante de la matriz de coeficientes.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 0 + 3 - 2 - 0 + 4 + 9 = 14 \neq 0$$

Ahora aplicaremos operaciones elementales sobre la matriz ampliada $[A \ b]$ con el objeto de triangular la matriz A , y de ese modo obtener un sistema triangular equivalente $Tx = c$

$$[A \ b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 6 \end{array} \right] \rightarrow F_1(-1/2)+F_2; F_1(1/2)+F_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -3/2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 7/2 & -7/2 & 13/2 \end{array} \right] \rightarrow F_2(7/3)+F_3 \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -3/2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & -14/3 & 16/3 \end{array} \right]$$

Hemos conseguido triangularizar superiormente la matriz A , con lo que el sistema triangular equivalente es:

$$\begin{aligned} 2x + 3y - z &= 1 \\ -\frac{3}{2}y - \frac{1}{2}z &= -\frac{1}{2} \\ -\frac{14}{3}z &= \frac{16}{3} \end{aligned}$$

$$\text{con } T = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{14}{3} \end{bmatrix}; \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}; \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{16}{3} \end{bmatrix}$$

Usando sustitución regresiva, es decir, partimos resolviendo la última ecuación para despejar la última incógnita y el resultado obtenido se reemplaza en la penúltima ecuación para despejar la penúltima incógnita y así sucesivamente, se tiene que:

$$z = -\frac{16}{14} = -\frac{8}{7}$$

$$\frac{3}{2}y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}z \Rightarrow \frac{3}{2}y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{8}{7}\right) \Rightarrow \frac{3}{2}y = \frac{15}{14} \Rightarrow y = \frac{2}{3} \cdot \frac{15}{14} \Rightarrow y = \frac{5}{7}$$

$$2x = 1 + z - 3y \Rightarrow 2x = 1 - \frac{8}{7} - \frac{15}{7} \Rightarrow 2x = -\frac{16}{7} \Rightarrow x = -\frac{8}{7}$$

Finalmente, podemos decir que el vector solución del sistema

$$\begin{aligned}2x + 3y - z &= 1 \\ x - z &= 0 \\ -x + 2y - 3z &= 6\end{aligned}$$

$$\text{es } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{8}{7} \\ \frac{5}{7} \\ -\frac{8}{7} \end{bmatrix} \quad \square$$

3

Resuelva, usando el Método de Jordan, el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$\begin{aligned}2x + 3y - z &= 1 \\ x - z &= 0 \\ -x + 2y - 3z &= 6\end{aligned}$$

Solución:

Observemos que el sistema anterior es el mismo que resolvimos en el ejercicio 56, usando el Método de Gauss.

$$[A \quad \mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & : & 1 \\ 1 & 0 & -1 & : & 0 \\ -1 & 2 & -3 & : & 6 \end{bmatrix} \rightarrow F_1(-1/2)+F_2; F_1(1/2)+F_3$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & : & 1 \\ 0 & -3/2 & -1/2 & : & -1/2 \\ 0 & 7/2 & -7/2 & : & 13/2 \end{bmatrix} \rightarrow F_2(7/3)+F_3 \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & : & 1 \\ 0 & -3/2 & -1/2 & : & -1/2 \\ 0 & 0 & -14/3 & : & 16/3 \end{bmatrix}$$

Falta la segunda etapa del proceso, que es generar los ceros en la parte superior de la matriz de coeficientes.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & : & 1 \\ 0 & -3/2 & -1/2 & : & -1/2 \\ 0 & 0 & -14/3 & : & 16/3 \end{bmatrix} \rightarrow F_3(-3/28)+F_2; F_3(-3/14)+F_1$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & : & -1/7 \\ 0 & -3/2 & 0 & : & -15/14 \\ 0 & 0 & -14/3 & : & 16/3 \end{bmatrix} \rightarrow F_2(2)+F_1 \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & : & -16/7 \\ 0 & -3/2 & 0 & : & -15/14 \\ 0 & 0 & -14/3 & : & 16/3 \end{bmatrix}$$

Hemos conseguido obtener el sistema diagonal $D \mathbf{x} = \mathbf{d}$ con

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{14}{3} \end{bmatrix}; \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}; \mathbf{d} = \begin{bmatrix} -\frac{16}{7} \\ -\frac{15}{14} \\ \frac{16}{3} \end{bmatrix}$$

Para resolver el sistema anterior debemos despejar directamente cada incógnita de cada ecuación :

$$2x = -\frac{16}{7} \Rightarrow x = -\frac{8}{7}$$

$$-\frac{3}{2}y = -\frac{15}{14} \Rightarrow y = \frac{5}{7}$$

$$-\frac{14}{3}z = \frac{16}{3} \Rightarrow z = -\frac{8}{7}$$

Finalmente la solución del sistema

$$2x + 3y - z = 1$$

$$x - z = 0$$

$$-x + 2y - 3z = 6$$

es

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{8}{7} \\ \frac{5}{7} \\ -\frac{8}{7} \end{bmatrix}$$

que coincide, como era previsible, con la obtenida usando el Método de Gauss. $\square$

Resuelva, usando el Método de la Inversa, el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$\begin{aligned}x + y - z &= 1 \\x + 2y - z &= 0 \\-x + y - 3z &= 2\end{aligned}$$

Solución:

En primer lugar debemos verificar si la matriz de coeficientes posee un determinante distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -6 + 1 - 1 - 2 + 1 + 3 = -4 \neq 0$$

Ahora podemos proceder con el cálculo de la inversa de A sabiendo que tal inversa existe porque $|A| \neq 0$

Para calcular la inversa podemos usar operaciones elementales o el método de la adjunta. Usaremos operaciones elementales.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & : & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & : & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -3 & : & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow F_1(-1)+F_2; F_1(1)+F_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & : & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & : & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow F_2(-2)+F_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & : & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & : & 3 & -2 & 1 \end{array} \right] \rightarrow F_3(-1/4)$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & : & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & : & -3/4 & 1/2 & -1/4 \end{array} \right] \rightarrow F_3(1)+F_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & : & 1/4 & 1/2 & -1/4 \\ 0 & 1 & 0 & : & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & : & -3/4 & 1/2 & -1/4 \end{array} \right] \rightarrow F_2(-1)+F_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & : & 5/4 & -1/2 & -1/4 \\ 0 & 1 & 0 & : & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & : & -3/4 & 1/2 & -1/4 \end{array} \right]$$

De lo anterior concluimos que $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -1 & 1 & 0 \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$

Aplicando el Método de la Inversa se tiene que:

$$\mathbf{x} = A^{-1} \cdot \mathbf{b} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -1 & 1 & 0 \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ -1 \\ -\frac{5}{4} \end{bmatrix}$$

Las incógnitas toman los valores $x = \frac{3}{4}$, $y = -1$ y $z = -\frac{5}{4}$ $\square$

5

Resuelva, usando el Método de Cramer, el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ x + 2y - z &= 0 \\ -x + y - 3z &= 2 \end{aligned}$$

Solución:

En primer lugar escribamos el sistema en forma matricial.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Calculemos ahora el determinante de A para saber si es distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -6 + 1 - 1 - 2 + 1 + 3 = -4 \neq 0$$

$$x_1 \equiv x = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{-6-2+0+4+1-0}{-4} = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$$

Notemos que A_1 es la matriz que se obtiene de A reemplazando la primera columna $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ por el vector de constantes $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$.

$$x_2 \equiv y = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{0+1-2-0+2+3}{-4} = \frac{4}{-4} = -1$$

Notemos que A_2 es la matriz que se obtiene de A reemplazando la segunda columna $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ por el vector de constantes $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$x_3 \equiv z = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{4+0+1+2-0-2}{-4} = \frac{5}{-4} = -\frac{5}{4}$$

Notemos que A_3 es la matriz que se obtiene de A reemplazando la tercera columna $\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}$ por el vector de constantes $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

Finalmente el vector solución está dado por:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ -1 \\ -\frac{5}{4} \end{bmatrix} \quad \square$$

Calcule el rango de las siguientes matrices:

$$a) A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$b) B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$c) C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -2 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Solución:

$$a) A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Escalonemos la matriz A , usando operaciones elementales

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow F_1(-1)+F_2 ; F_1(1)+F_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Observamos que es imposible seguir generando ceros sin perder los que ya hemos ganado. Cuando llegamos a esta etapa significa que el proceso de escalonamiento ha terminado, y procedemos a contar las filas distintas de la nula, número que se corresponde con el rango de la matriz A .

Luego: $\text{rango}(A) = 2$ $\square$

$$b) B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow F_1(-1/2)+F_2 ; F_1(-1/2)+F_3$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & 3/2 \end{bmatrix} \rightarrow F_2(-2)+F_3 \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 5/2 \end{bmatrix}$$

Hemos finalizado el proceso de escalonamiento, que en este caso como la matriz es cuadrada coincide exactamente con una triangulación común. Ahora contamos el número de filas distintas de la nula y concluimos que $\text{rango}(B) = 3$, pues se observan tres filas distintas de la nula. $\square$

$$c) C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -2 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -2 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow F_1(2)+F_2 \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -2 \\ 0 & 6 & 10 & -3 \end{bmatrix}$$

Es imposible seguir generando ceros, por lo tanto, $\text{rango}(C) = 2$. $\square$

7

Clasifique los siguientes sistemas de ecuaciones lineales, de acuerdo al número de soluciones que tenga:

a)

$$\begin{aligned} 3x - 2y + z &= 1 \\ x - 4y - z &= 0 \\ -x + 4y + z &= -1 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} 2x - y &= 4 \\ x - y &= 1 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} x - 4 &= y + z \\ 4 - x &= 4z \end{aligned}$$

Solución:

a) El sistema

$$\begin{aligned} 3x - 2y + z &= 1 \\ x - 4y - z &= 0 \\ -x + 4y + z &= -1 \end{aligned}$$

escrito en forma matricial es:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix}; \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}; \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Trabajaremos sólo con la matriz ampliada $(A : \mathbf{b})$, pues de ésta podemos extraer la información relativa al rango de A y al rango de la ampliada.

$$(A : \mathbf{b}) = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & -1 \end{array} \right] \rightarrow F_1(-1/3)+F_2; F_1(1/3)+F_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -10/3 & -4/3 & -1/3 \\ 0 & 10/3 & 4/3 & -2/3 \end{array} \right] \rightarrow F_2(1)+F_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -10/3 & -4/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right]$$

Tenemos que $r_A = 2$ y $r_{Ab} = 3$. Como ambos números son distintos, concluimos que el sistema no posee solución. $\square$

b) El sistema

$$\begin{aligned}2x - y &= 4 \\ x - y &= 1\end{aligned}$$

escrito en forma matricial es:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}; \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}; \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Luego

$$(A : \mathbf{b}) = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{array} \right] \rightarrow F_1(-1/2)+F_2$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 4 \\ 0 & -1/2 & -1 \end{array} \right]$$

Tenemos que $r_A = 2 = r_{Ab} = n$. Lo anterior, nos dice que el sistema posee una solución. $\square$

c) El sistema

$$\begin{aligned}x - 4 &= y + z \\ 4 - x &= 4z\end{aligned}$$

lo podemos reescribir como

$$\begin{aligned}x - y - z &= 4 \\ x + 4z &= 4\end{aligned}$$

y escrito en forma matricial es:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}; \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}; \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Luego

$$(A : \mathbf{b}) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 4 & 4 \end{array} \right] \rightarrow F_1(-1)+F_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & : & 4 \\ 0 & 1 & 5 & : & 0 \end{bmatrix}$$

Tenemos que $r_A = 2 = r_{Ab} < n = 3$. Lo anterior, nos dice que el sistema posee infinitas soluciones. $\square$

8

Resuelva el sistema
$$\begin{aligned} 3x - 2y + 5z &= 1 \\ x - y + z &= 0 \end{aligned}$$

Solución:

El sistema dado, escrito en forma matricial es $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Luego, la matriz ampliada $(A : \mathbf{b})$ es $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Así,

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow F_1(-1/3)+F_2 \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 & 1 \\ 0 & -1/3 & -2/3 & -1/3 \end{bmatrix}$$

$r_1 = \text{rango}(A) = 2 = r_2 = \text{rango}(A : \mathbf{b}) < N = 3 \Rightarrow$ existen infinitas soluciones

Fijemos, por ejemplo, z :

$$-y/3 - 2z/3 = -1/3 \Rightarrow y + 2z = 1 \Rightarrow y = 1 - 2z$$

$$3x - 2y + 5z = 1 \Rightarrow x = (1 + 2y - 5z)/3 \Rightarrow x = (1 + 2 - 4z - 5z)/3 \Rightarrow$$

$$x = (3 - 9z)/3 \Rightarrow x = 1 - 3z$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 3z \\ 1 - 2z \\ z \end{bmatrix}, z \in \mathbb{R} \quad \square$$

9

Muestre que si u y v son dos soluciones del sistema homogéneo $Ax = \theta$, entonces $3u - 2v$ es también solución.

Solución:

Si u y v son dos soluciones del sistema homogéneo $Ax = \theta$, entonces $Au = \theta$ y $Av = \theta$

Luego

$$A(3u - 2v) = 3Au - 2Av = 3\theta - 2\theta = \theta$$

Esto muestra que $3u - 2v$ es también solución. $\square$

10

Resuelva el siguiente sistema usando Cramer y Jordan :

$$2x_1 - 3x_2 + x_3 = -1$$

$$-x_1 + x_3 = 0$$

$$x_1 - x_2 + 3x_3 = 1$$

Solución:

a) **Cramer.**

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; |A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -9$$

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-3-1}{-9} = \frac{-4}{-9} = \frac{4}{9}$$

$$x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-1-1-2-3}{-9} = \frac{-7}{-9} = \frac{7}{9}$$

$$x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-1-3}{-9} = \frac{-4}{-9} = \frac{4}{9}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{9} \\ \frac{7}{9} \\ \frac{4}{9} \end{bmatrix}$$

b) **Jordan.**

$$(A : b) = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_{12}} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1(2)+F_2}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1(1)+F_3} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2(-1/3)+F_3}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 4/3 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3(-1)+F_2} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -7/3 \\ 0 & 0 & 3 & 4/3 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3(-1/3)+F_1}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -4/9 \\ 0 & -3 & 0 & -7/3 \\ 0 & 0 & 3 & 4/3 \end{bmatrix}$$

$$-x_1 = -\frac{4}{9} \Rightarrow x_1 = \frac{4}{9}$$

$$-3x_2 = -\frac{7}{3} \Rightarrow x_2 = \frac{7}{9}$$

$$3x_3 = \frac{4}{3} \Rightarrow x_3 = \frac{4}{9}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{9} \\ \frac{7}{9} \\ \frac{4}{9} \end{bmatrix} \quad \square$$

Obtenga la solución del sistema

$$ax + y - z = 1$$

$$x - y + z = 3$$

$$3x + 6y - 7z = 5$$

usando : a) Gauss b) Jordan , con $a \in \mathbb{R}$

Solución:

La matriz de coeficientes del sistema dado es : $A = \begin{bmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 6 & -7 \end{bmatrix}$

Calculemos el determinante de A para saber cuándo tendrá solución única.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 6 & -7 \end{vmatrix} = 7a + 3 - 6 - 3 - 6a + 7 = a + 1 = 0 \Rightarrow a = -1$$

Notamos que el sistema tendrá solución única si $a \neq -1$.

a) Gauss.

$$(A : b) = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & -7 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{F_{12}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ a & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 6 & -7 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1(-a)+F_2; F_1(-3)+F_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1+a & -1-a & 1-3a \\ 0 & 9 & -10 & -4 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2(-9/(1+a))+F_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1+a & -1-a & 1-3a \\ 0 & 0 & -1 & (23a-13)/(1+a) \end{array} \right)$$

$$-z = \frac{23a-13}{1+a} \Rightarrow z = \frac{13-23a}{1+a}$$

$$(1+a)y - (1+a)z = 1 - 3a \Rightarrow y = \frac{1-3a+(1+a)z}{1+a} \Rightarrow y = \frac{1-3a+13-23a}{1+a} \Rightarrow y = \frac{14-26a}{1+a}$$

$$x - y + z = 3 \Rightarrow x = 3 + y - z \Rightarrow x = 3 + \frac{14-26a}{1+a} - \frac{13-23a}{1+a} \Rightarrow x = \frac{3+3a+14-26a-13+23a}{1+a}$$

$$\Rightarrow x = \frac{4}{1+a}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{1+a} \\ \frac{14-26a}{1+a} \\ \frac{13-23a}{1+a} \end{bmatrix}, \quad a \in \mathbb{R} - \{-1\} \quad \square$$

b) Jordan

Usando lo que ya hemos avanzado con Gauss.

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1+a & -1-a & 1-3a \\ 0 & 0 & -1 & (23a-13)/(1+a) \end{array} \right) \rightarrow F_3(-(1+a))+F_2; F_3(1)+F_1$$

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 0 & (26a-10)/(1+a) \\ 0 & 1+a & 0 & 14-26a \\ 0 & 0 & -1 & (23a-13)/(1+a) \end{array} \right) \rightarrow F_2(1/(1+a))+F_1$$

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 4/(1+a) \\ 0 & 1+a & 0 & 14-26a \\ 0 & 0 & -1 & (23a-13)/(1+a) \end{array} \right)$$

$$x = \frac{4}{1+a}$$

$$(1+a)y = 14 - 26a \Rightarrow y = \frac{14-26a}{1+a}$$

$$-z = \frac{23a-13}{1+a} \Rightarrow z = \frac{13-23a}{1+a}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{1+a} \\ \frac{14-26a}{1+a} \\ \frac{13-23a}{1+a} \end{bmatrix}, \quad a \in \mathbb{R} - \{-1\} \quad \square$$

Observemos que si $a = -1$, entonces el sistema original queda como

$$\begin{aligned} -x + y - z &= 1 \\ x - y + z &= 3 \\ 3x + 6y - 7z &= 5 \end{aligned}$$

Analicemos qué sucede con los rangos, para el sistema anterior.

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & -7 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1+F_2; F_1(-3)+F_3} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & -4 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_{23}} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Luego $r_A = 2 \neq r_{Ab} = 3$. Esto muestra que para $a = -1$ el sistema dado no posee solución. $\square$

13

Muestre que si $A = \begin{bmatrix} 1 & -a & 1 \\ a & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{bmatrix}$, con $a \in \mathbb{R}$, entonces el sistema homogéneo asociado posee infinitas soluciones.

Solución:

Dado que la matriz A es cuadrada y está asociada a un sistema homogéneo, basta calcular la determinante de A para saber si el sistema homogéneo posee infinitas o una única solución, pues si la determinante es cero, entonces el sistema homogéneo cuadrado posee infinitas soluciones y si el determinante el distinto de cero posee una única solución.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -a & 1 \\ a & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = 1 - a^2 + a^2 - 1 - a^2 + a^2 = 0, \text{ con } a \in \mathbb{R}$$

Esto muestra que efectivamente el sistema homogéneo asociado a la matriz A posee infinitas soluciones. $\square$

Resuelva el sistema

$$y - z = -1 \quad ; \quad 4x + 6 = 5z \quad ; \quad 3x - 2y = -3z - 4$$

usando :

a) Cramer

b) Jordan

Solución:

El sistema es :

$$y - z = -1$$

$$4x - 5z = -6$$

$$3x - 2y + 3z = -4$$

En formato matricial : $Ax = b$, con

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & -5 \\ 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -1 \\ -6 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & -5 \\ 3 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -15 + 8 - 12 = -19 \neq 0$$

a) Cramer

$$x_1 \equiv x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -6 & 0 & -5 \\ -4 & -2 & 3 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{20 - 12 + 10 + 18}{-19} = -\frac{36}{19}$$

$$x_2 \equiv y = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 4 & -6 & -5 \\ 3 & -4 & 3 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{15 + 16 - 18 + 12}{-19} = -\frac{25}{19}$$

$$x_3 \equiv z = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & -6 \\ 3 & -2 & -4 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-18+8+16}{-19} = -\frac{6}{19}$$

$$\therefore \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{36}{19} \\ -\frac{25}{19} \\ -\frac{6}{19} \end{bmatrix} \quad \square$$

b) Jordan

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 4 & 0 & -5 & -6 \\ 3 & -2 & 3 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_{13}} \begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 & -4 \\ 4 & 0 & -5 & -6 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1(-4/3)+F_2}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 8/3 & -9 & -2/3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2(-3/8)+F_3}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 8/3 & -9 & -2/3 \\ 0 & 0 & 19/8 & -3/4 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3(72/19)+F_2; F_3(-24/19)+F_1}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & -58/19 \\ 0 & 8/3 & 0 & -200/57 \\ 0 & 0 & 19/8 & -3/4 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2(3/4)+F_1} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & -108/19 \\ 0 & 8/3 & 0 & -200/57 \\ 0 & 0 & 19/8 & -3/4 \end{bmatrix}$$

$$3x = -\frac{108}{19} \Rightarrow x = -\frac{36}{19}$$

$$\frac{8}{3}y = -\frac{200}{57} \Rightarrow y = -\frac{25}{19}$$

$$\frac{19}{8}z = -\frac{3}{4} \Rightarrow z = -\frac{6}{19}$$

$$\therefore \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{36}{19} \\ -\frac{25}{19} \\ -\frac{6}{19} \end{bmatrix} \quad \square$$

Si $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, entonces resuelva el sistema $A \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \mathbf{c} = \mathbf{b}$ usando :

a) El método de Gauss b) El método de Cramer
c) El método de la inversa

Solución:

$$A \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \mathbf{c} = \mathbf{b} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 + 0 + 4 + 6 - 0 - 3 = 8 \neq 0$$

$$a) \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{F_1(-1)+F_2 \\ F_1(-3)+F_3}} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 11 & -7 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2(-11/2)+F_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & -21 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, el sistema triangular equivalente es :

$$4x_3 = -21 \Rightarrow x_3 = -\frac{21}{4}$$

$$2x_2 - 2x_3 = 4 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{2}(4 + 2x_3) \Rightarrow x_2 = 2 + x_3 \Rightarrow x_2 = 2 - \frac{21}{4} = -\frac{13}{4}$$

$$x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -1 \Rightarrow x_1 = -1 + 3x_2 - 2x_3 \Rightarrow x_1 = -1 - \frac{39}{4} + \frac{42}{4} = -\frac{1}{4}$$

El vector solución es

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{13}{4} \\ -\frac{21}{4} \end{bmatrix} \quad \square$$

b)

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{8} = \frac{-1+0+12-4-9-0}{8} = \frac{-2}{8} = -\frac{1}{4}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}}{8} = \frac{-3+0-4-18-1-0}{8} = \frac{-26}{8} = -\frac{13}{4}$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix}}{8} = \frac{2-27-2-3-6-6}{8} = \frac{-42}{8} = -\frac{21}{4}$$

El vector solución es

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{13}{4} \\ -\frac{21}{4} \end{bmatrix} \quad \square$$

c) Calculemos la inversa de A usando operaciones elementales.

$$[A : I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{F_1(-1)+F_2 \\ F_1(-3)+F_3}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 11 & -7 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{F_2(1/2)}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 11 & -7 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{F_2(-11)+F_3}$$

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 5/2 & -11/2 & 1 \end{array} \right] \rightarrow F_3(1/4) \\
 & \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5/8 & -11/8 & 1/4 \end{array} \right] \rightarrow \begin{array}{l} F_3(1)+F_2 \\ F_3(-2)+F_1 \end{array} \\
 & \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & -1/4 & 11/4 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/8 & -7/8 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 5/8 & -11/8 & 1/4 \end{array} \right] \rightarrow F_2(3)+F_1 \\
 & \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/8 & 1/8 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 1/8 & -7/8 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 5/8 & -11/8 & 1/4 \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/8 & 1/8 & 1/4 \\ 1/8 & -7/8 & 1/4 \\ 5/8 & -11/8 & 1/4 \end{bmatrix}$

El vector solución es

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/8 & 1/8 & 1/4 \\ 1/8 & -7/8 & 1/4 \\ 5/8 & -11/8 & 1/4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{13}{4} \\ -\frac{21}{4} \end{bmatrix} \quad \square$$

17

Recordemos que un sistema $Ax = b$ es homogéneo si $b = \theta$.

Muestre que el sistema

$$3x_1 - \cos(\pi) - 5x_2 = 1 - 2x_3$$

$$4x_3 - 5x_2 = x_1 - 3x_3$$

es homogéneo, si consideramos x_1 , x_2 y x_3 como incógnitas.

Solución:

Desarrollemos el sistema

$$3x_1 - \cos(\pi) - 5x_2 = 1 - 2x_3$$

$$4x_3 - 5x_2 = x_1 - 3x_3$$

recordando que $\cos(\pi) = -1$

$$3x_1 - (-1) - 5x_2 = 1 - 2x_3$$

$$4x_3 - 5x_2 = x_1 - 3x_3$$

$$3x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 0$$

$$x_1 + 5x_2 - 7x_3 = 0$$

En forma matricial

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 1 & 5 & -7 \end{pmatrix}; \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se observa que el sistema dado es homogéneo. $\square$

21

Muestre que el sistema $2x_1 - x_2 + x_3 = 5$; $3x_1 - x_3 = 2$; $-x_1 + \frac{1}{3}x_3 = a$, con $a \neq 0$, no posee solución

Solución:

Escribamos el sistema $2x_1 - x_2 + x_3 = 5$; $3x_1 - x_3 = 2$; $-x_1 + \frac{1}{3}x_3 = a$, con $a \neq 0$, en forma matricial

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ a \end{bmatrix}$$

Calculemos rangos usando la matriz ampliada

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & \frac{1}{3} & a \end{array} \right] \xrightarrow{F_{13}} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & \frac{1}{3} & a \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 5 \end{array} \right] \xrightarrow{F_1(3)+F_2; F_1(2)+F_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & \frac{1}{3} & a \\ 0 & 0 & 0 & 2+3a \\ 0 & -1 & \frac{5}{3} & 5+2a \end{array} \right] \xrightarrow{F_{23}} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & \frac{1}{3} & a \\ 0 & -1 & \frac{5}{3} & 5+2a \\ 0 & 0 & 0 & 2+3a \end{array} \right]$$

Ahora, dado que $a \neq 0$, se tiene que $2+3a \neq 0$.

Luego $\text{rango}(A) = 2 \neq \text{rango}(A : \mathbf{b}) = 3$. Esto muestra que el sistema no posee solución si $a \neq 0$. $\square$

22

Explique si es verdad o mentira que si $\alpha + \beta = 0$, entonces el sistema

$$\begin{aligned} x + y \cos(\alpha) &= 0 \\ x \cos(\alpha) + y + \cos(\beta) z &= 0 \\ y \cos(\beta) + z &= 0 \end{aligned}$$

no posee solución.

Solución:

Tenemos que de acuerdo al enunciado

$$\alpha + \beta = 0 \Rightarrow \beta = -\alpha \Rightarrow \cos(\beta) = \cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$$

Calculemos el determinante de la matriz de coeficientes

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos(\alpha) & 0 \\ \cos(\alpha) & 1 & \cos(\beta) \\ 0 & \cos(\beta) & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \cos(\alpha) & 0 \\ \cos(\alpha) & 1 & \cos(\alpha) \\ 0 & \cos(\alpha) & 1 \end{vmatrix} =$$

$$1 - \cos^2(\alpha) - \cos^2(\alpha) = 1 - 2\cos^2(\alpha) = -(2\cos^2(\alpha) - 1) =$$

$$-\cos(2\alpha) = 0 \Rightarrow \cos(2\alpha) = 0 \Rightarrow 2\alpha = (2k+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = (2k+1)\frac{\pi}{4}$$

Basta considerar $\alpha = \frac{\pi}{2}$, para obtener $\beta = -\frac{\pi}{2}$ y el sistema

$$\begin{aligned}x + y \cos(\alpha) &= 0 \\x \cos(\alpha) + y + \cos(\beta) z &= 0 \\y \cos(\beta) + z &= 0\end{aligned}$$

se transforma en

$$\begin{aligned}x &= 0 \\y &= 0 \\z &= 0\end{aligned}$$

y este sistema es compatible determinado, es decir, posee solución única $\square$

23

Resuelva el sistema dado, suponiendo que c es constante.

$$3x_1 - 4x_2 + x_3 = 6c$$

$$x_1 - 3c = 4x_2$$

Solución:

Escribamos el sistema en forma matricial :

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 & 6c \\ 1 & -4 & 0 & 3c \end{bmatrix} \rightarrow F_1(-1/3)+F_2 \begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 & 6c \\ 0 & -8/3 & -1/3 & c \end{bmatrix}$$

$$r_A \equiv \text{rango}(A) = 2 = r_{Ab} \equiv \text{rango}(A : \mathbf{b}) < N = 3$$

Debemos fijar $N - r_A = 3 - 2 = 1$ incógnita

Fijemos x_3 , y despejemos x_2 de la segunda ecuación obtenida :

$$-\frac{8}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3 = c \Rightarrow x_2 = \frac{-3c-x_3}{8}$$

$$3x_1 - 4x_2 + x_3 = 6c \Rightarrow x_1 = \frac{6c+4x_2-x_3}{3} \Rightarrow x_1 = \frac{6c+4\left(\frac{-3c-x_3}{8}\right)-x_3}{3} \Rightarrow$$

$$x_1 = \frac{48c-12c-4x_3-8x_3}{24} \Rightarrow x_1 = \frac{36c-12x_3}{24} \Rightarrow x_1 = \frac{3c-x_3}{2}$$

Finalmente, el vector solución es $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3c-x_3}{2} \\ \frac{-3c-x_3}{8} \\ x_3 \end{bmatrix}$, $x_3 \in \mathbb{R}$, y además $c \in \mathbb{R}$ constante $\square$

24

Muestre que el sistema

$$\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 1 \\ \frac{-2}{5}x - \frac{3a}{5}y &= a \end{aligned}$$

siempre posee infinitas soluciones, con a constante real

Solución:

Escribamos la matriz ampliada y calculemos los rangos

$$(A : \mathbf{b}) = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ \frac{-2}{5} & \frac{-3a}{5} & 0 & a \end{bmatrix} \rightarrow_{F_1(1/5)+F_2} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{3}{5}(1-a) & \frac{1}{5} & a + \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

De la última matriz ampliada observamos que no importando el valor de a se tiene que $\text{rango}(A : \mathbf{b}) = 2 = \text{rango}(A) < n = 3$

De lo anterior, podemos concluir que el sistema posee infinitas soluciones. $\square$

25

Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones :

$$\begin{aligned} a) \quad & -3x + 4y - 1 = 2 \\ & 6x - 8y + 3 = a, \quad a \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \quad & 4t - 2y + z = 1 - x \\ & z + y = -1 \\ & x = t + w \end{aligned}$$

Solución:

$$\begin{aligned} a) \quad & -3x + 4y - 1 = 2 \\ & 6x - 8y + 3 = a, \quad a \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -3x + 4y = 3 \\ & 6x - 8y = a - 3 \end{aligned}$$

Tenemos que :

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 6 & -8 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ a-3 \end{pmatrix}$$

Luego :

$$(A : \mathbf{b}) = \left(\begin{array}{cc|c} -3 & 4 & 3 \\ 6 & -8 & a-3 \end{array} \right) \rightarrow F_{21}(2) \left(\begin{array}{cc|c} -3 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & a+3 \end{array} \right)$$

i) Una solución. Se debe dar $r_A = r_{Ab} = n$, pero $r_A = \text{rango}(A) = 1$ y $n = 2$, por lo tanto, este sistema nunca tendrá única solución.

ii) Infinitas soluciones. $r_A = r_{Ab} < n$

Para que r_A sea igual a r_{Ab} debemos tener que $a + 3 = 0$, es decir $a = -3$.

Por lo tanto, si $a = -3$, entonces $r_A = r_{Ab} = 1 < n = 2$ y el sistema posee infinitas soluciones.

Obtengamos tales soluciones. Para ello debemos fijar $n - r_A = 2 - 1 = 1$ incógnitas.

Fijemos x .

$$\begin{aligned} -3x + 4y = 3 & \Rightarrow y = \frac{3+3x}{4} \\ \therefore \bar{x} &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \frac{3+3x}{4} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

iii) Ninguna solución. Para que el sistema no posea solución se debe tener que $r_A \neq r_{Ab}$, para ello es necesario que $a + 3 \neq 0$. Por lo tanto, si $a + 3 \neq 0$, es decir, $a \neq -3$, entonces $r_A = 1 \neq r_{Ab} = 2$, y el sistema no tiene solución. $\square$

$$\begin{aligned} b) \quad & 4t - 2y + z = 1 - x \\ & z + y = -1 \\ & x = t + w \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}4t - 2y + z + x &= 1 \\ z + y &= -1 \\ x - t - w &= 0\end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} z & y & w & t & x \\ 1 & -2 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego

$$(A : b) = \left(\begin{array}{cccccc} 1 & -2 & 0 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow F_{21}(-1)$$

$$\left(\begin{array}{cccccc} 1 & -2 & 0 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -4 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Observamos que $r_A = 3 = r_{Ab} < n = 5$. Por lo tanto, el sistema posee infinitas soluciones, y para obtener tales soluciones debemos fijar $N - r_A = 5 - 3 = 2$ incógnitas.

Fijemos t y x .

El sistema equivalente que hemos obtenido es:

$$\begin{aligned}z - 2y + 4t + x &= 1 & (1) \\ 3y - 4t - x &= -2 & (2) \\ -w - t + x &= 0 & (3)\end{aligned}$$

De (2) despejamos y en función de t y de x :

$$y = \frac{-2+4t+x}{3} \quad (4)$$

De (3) despejamos w :

$$w = x - t$$

De (1) y de (4) despejamos z :

$$z = 1 + 2y - 4t - x \Rightarrow z = 1 + 2 \frac{-2+4t+x}{3} - 4t - x \Rightarrow z = \frac{-1-4t-x}{3}$$

$$\therefore \mathbf{x} = \begin{pmatrix} z \\ y \\ w \\ t \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1-4t-x}{3} \\ \frac{-2+4t+x}{3} \\ x-t \\ t \\ x \end{pmatrix}; t, x \in \mathbb{R} \quad \square$$

26

Obtenga los valores de $a \in \mathbb{R}$ tales que el siguiente sistema

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + ax_3 &= 0 \\ x_1 - x_3 &= a + 1 \\ -ax_1 + x_2 &= -a \end{aligned}$$

tenga: *i)* única solución, *ii)* infinitas soluciones, *iii)* ninguna solución. Calcule las soluciones en el caso *ii)*.

Solución:

$$\begin{aligned} (A : \mathbf{b}) &= \begin{pmatrix} 3 & -1 & a & 0 \\ 1 & 0 & -1 & a+1 \\ -a & 1 & 0 & -a \end{pmatrix} \rightarrow F_{21}(-\frac{1}{3}) \begin{pmatrix} 3 & -1 & a & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -1-\frac{a}{3} & a+1 \\ -a & 1 & 0 & -a \end{pmatrix} \\ &\rightarrow F_{31}(\frac{a}{3}) \begin{pmatrix} 3 & -1 & a & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -1-\frac{a}{3} & a+1 \\ 0 & 1-\frac{a}{3} & \frac{a^2}{3} & -a \end{pmatrix} \rightarrow F_{32}(a-3) \begin{pmatrix} 3 & -1 & a & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -1-\frac{a}{3} & a+1 \\ 0 & 0 & 3 & a^2-3a-3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

i) Tendremos única solución cuando $r_A = r_{Ab} = n = 3$

Observamos que no importando el valor de $a \in \mathbb{R}$, siempre tendremos única solución, pues $r_A = \text{rango}(A) = 3$, $r_{Ab} = \text{rango}(A : \mathbf{b}) = 3$ y $n = 3$. (El número de filas distintas de la nula no depende del valor que tome a).

Los casos *ii)* y *iii)* nunca se darán. $\square$

28

Obtenga el(los) valor(es) de a , con $a > 0$, de modo que el sistema

$$\begin{aligned} ax - y &= 0 \\ x - ay &= 0 \end{aligned}$$

posea infinitas soluciones

Solución:

Un sistema homogéneo cuadrado posee única solución cuando el determinante de la matriz de coeficientes es distinto de cero, en caso contrario el sistema posee infinitas soluciones.

$$\begin{vmatrix} a & -1 \\ 1 & -a \end{vmatrix} = -a^2 + 1 = 0 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = 1 \vee a = -1$$

Pero $a > 0$, luego existe sólo un valor de a ($a = 1$) para el cual el sistema anterior posee infinitas soluciones ☐

29

Aplique el método de la inversa para resolver el siguiente sistema :

$$\begin{aligned} 3x - 4y + z &= -1 \\ x - y + z &= 4 \\ -x + y &= -3 \end{aligned}$$

Solución:

Observamos que $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Calculemos la inversa de A :

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{F_1(1/3)} \\
 & \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -4/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{F_1(-1)+F_2 \\ F_1(1)+F_3}} \\
 & \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -4/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & -1/3 & 1 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{F_2(3)} \\
 & \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -4/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{F_2(1/3)+F_3} \\
 & \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -4/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{F_3(-2)+F_2} \\
 & \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -4/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{F_3(-1/3)+F_1} \\
 & \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -4/3 & 0 & 1/3 & -1/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{F_2(4/3)+F_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

La inversa está dada por $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

El vector solución será

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = A^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 11 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Finalmente, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 14 \\ 11 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\square$

Resuelva el sistema

$$3x_1 - 2x_2 = -x_3 + 1$$

$$x_3 - x_2 = 5x_1 - 6$$

$$x_2 + 3x_3 = 4x_1 - 4$$

usando : a) Gauss b) Jordan c) Cramer

Solución:

Reordenando los elementos del sistema, se obtiene :

$$3x_1 - 2x_2 + x_3 = 1$$

$$-5x_1 - x_2 + x_3 = -6$$

$$-4x_1 + x_2 + 3x_3 = -4$$

En forma matricial :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -5 & -1 & 1 \\ -4 & 1 & 3 \end{bmatrix}; \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}; \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ -4 \end{bmatrix}$$

a) Gauss

$$(A : \mathbf{b}) = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 1 \\ -5 & -1 & 1 & -6 \\ -4 & 1 & 3 & -4 \end{array} \right] \rightarrow \begin{array}{l} F_1(5/3) + F_2 \\ F_1(4/3) + F_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -13/3 & 8/3 & -13/3 \\ 0 & -5/3 & 13/3 & -8/3 \end{array} \right] \rightarrow F_2(-5/13) + F_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -13/3 & 8/3 & -13/3 \\ 0 & 0 & 43/13 & -1 \end{array} \right]$$

$$43/13 x_3 = -1 \Rightarrow x_3 = -\frac{13}{43}$$

$$-13/3 x_2 + 8/3 x_3 = -13/3 \Rightarrow -13/3 x_2 = -455/129 \Rightarrow x_2 = \frac{35}{43}$$

$$3x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \Rightarrow 3x_1 = 1 + \frac{70}{43} + \frac{13}{43} \Rightarrow 3x_1 = \frac{126}{43} \Rightarrow x_1 = \frac{42}{43}$$

Finalmente, el vector solución es $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{42}{43} \\ \frac{35}{43} \\ -\frac{13}{43} \end{bmatrix}$ $\square$

b) Jordan

Recordemos que el método de Jordan tiene como objetivo diagonalizar, esto significa que el método de Gauss nos entrega la primera parte del trabajo, pues triangulariza superiormente la matriz, falta por tanto triangularizar inferiormente.

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -13/3 & 8/3 & -13/3 \\ 0 & 0 & 43/13 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow F_3(-104/129) + F_2$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -13/3 & 0 & -455/129 \\ 0 & 0 & 43/13 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow F_3(-13/43) + F_1$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & 56/43 \\ 0 & -13/3 & 0 & -455/129 \\ 0 & 0 & 43/13 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow F_2(-6/13) + F_1$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 126/43 \\ 0 & -13/3 & 0 & -455/129 \\ 0 & 0 & 43/13 & -1 \end{bmatrix}$$

$$3x_1 = \frac{126}{43} \Rightarrow x_1 = \frac{42}{43}$$

$$-\frac{13}{3}x_2 = -\frac{455}{129} \Rightarrow x_2 = \frac{35}{43}$$

$$\frac{43}{13}x_3 = -1 \Rightarrow x_3 = -\frac{13}{43}$$

Finalmente, el vector solución es $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{42}{43} \\ \frac{35}{43} \\ -\frac{13}{43} \end{bmatrix}$ $\square$

c) Cramer

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -5 & -1 & 1 \\ -4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -9 + 8 - 5 - 4 - 3 - 30 = -43$$

$$x_1 = \frac{|\Delta_1|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -6 & -1 & 1 \\ -4 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{-43} = \frac{-3+8-6-4-1-36}{-43} = \frac{42}{43}$$

$$x_2 = \frac{|\Delta_2|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -5 & -6 & 1 \\ -4 & -4 & 3 \end{vmatrix}}{-43} = \frac{-54-4+20-24+12+15}{-43} = \frac{35}{43}$$

$$x_3 = \frac{|\Delta_3|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -5 & -1 & -6 \\ -4 & 1 & -4 \end{vmatrix}}{-43} = \frac{12-48-5-4+18+40}{-43} = -\frac{13}{43}$$

Finalmente, el vector solución es $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{42}{43} \\ \frac{35}{43} \\ -\frac{13}{43} \end{bmatrix}$ $\square$

31

Resuelva el sistema

$$2x_1 - 3x_2 + x_3 = -3$$

$$x_1 + 5x_2 - x_3 = 4$$

$$3x_1 - 2x_2 = 1 - x_3$$

usando el método de Cramer.

Solución:

El sistema dado se puede escribir como :

$$2x_1 - 3x_2 + x_3 = -3$$

$$x_1 + 5x_2 - x_3 = 4$$

$$3x_1 - 2x_2 + x_3 = 1$$

En forma matricial : $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Calculemos $\det(A)$: $|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 10 + 9 - 2 - 15 - 4 + 3 = 1 \neq 0$

Podemos usar el método de Cramer porque el sistema es cuadrado y además $\det(A) \neq 0$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} -3 & -3 & 1 \\ 4 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}}{1} = -15 + 3 - 8 - 5 + 6 + 12 = -7$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{1} = 8 + 9 + 1 - 12 + 2 + 3 = 11$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -3 & -3 \\ 1 & 5 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}}{1} = 10 - 36 + 6 + 45 + 16 + 3 = 44$$

Finalmente, el vector solución es $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 11 \\ 44 \end{bmatrix}$ $\square$

32

Resuelva el sistema

$$\begin{aligned} x - 3y + z &= 1 \\ -x - 2y + z &= 0 \\ \frac{1}{2}x - y - z &= 2 \end{aligned}$$

usando el método de Cramer.

Solución:

Para ocupar el método de Cramer debemos asegurarnos que el sistema sea cuadrado y además el determinante de la matriz de coeficientes debe ser distinto de cero.

Efectivamente el sistema es cuadrado, pues el número de incógnitas es 3 y el número de ecuaciones es 3.

Por otro lado,

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ \frac{1}{2} & -1 & -1 \end{vmatrix} = 2 - \frac{3}{2} + 1 + 1 + 3 + 1 = 8 - \frac{3}{2} = \frac{13}{2} \neq 0$$

Usando el método de Cramer:

$$x = x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{\frac{13}{2}} = \frac{2-6+4+1}{\frac{13}{2}} = \frac{1}{\frac{13}{2}} = \frac{2}{13}$$

$$y = x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 2 & -1 \end{vmatrix}}{\frac{13}{2}} = \frac{\frac{1}{2}-2-2-1}{\frac{13}{2}} = \frac{-\frac{9}{2}}{\frac{13}{2}} = -\frac{9}{13}$$

$$z = x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & 2 \end{vmatrix}}{\frac{13}{2}} = \frac{-4+1+1-6}{\frac{13}{2}} = \frac{-8}{\frac{13}{2}} = -\frac{16}{13}$$

Las incógnitas tienen los valores $x = \frac{2}{13}$, $y = -\frac{9}{13}$, $z = -\frac{16}{13}$ $\square$

RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS NO RESUELTOS SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

[11] Falso, pues $2x - 3y = 2 \frac{1}{2} - 3 \frac{1}{3} = 1 - 1 = 0 \neq 1$

[16] $x_1 = \frac{1}{8}, x_2 = \frac{33}{32}, x_3 = \frac{53}{32}$

[18] $x = -\frac{2}{13}, y = -\frac{10}{13}$

[19] a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$

b) $|A| = -15$

c) y d) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

[20] Falso

[27] a) $x = \frac{3te+we-5e}{8\pi+4e}; y = \frac{3t\pi+w\pi-5\pi}{8\pi+4e};$

$$z = \frac{7t\pi-te-3w\pi-3we+55\pi+35e}{48\pi+24e}$$

b) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

[33]

a) No

$$b) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}$$

GUÍA DE PRÁCTICO N°4

VALORES Y VECTORES PROPIOS DE UNA MATRIZ

Teoría Valores y Vectores Propios de una Matriz

▮ 48 Valores y Vectores Propios de una Matriz

Sea $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Se define el *valor propio*, *valor característico*, *autovalor* o *eigenvalor* de una matriz cuadrada A , como el número real o complejo λ tal que

$$Ax = \lambda x$$

con $x \neq \theta$, una matriz de orden $n \times 1$, que se denomina *vector propio*, *vector característico*, *autovector* o *eigenvector* asociado a λ .

▮ 49 Para calcular los valores propios es común usar la ecuación

$$|A - \lambda I| = 0$$

que es una ecuación polinomial cuyas soluciones son los valores propios de la matriz cuadrada A , con I la matriz idéntica del mismo orden que A .

Para calcular los vectores propios asociados a un valor propio λ se resuelve el sistema homogéneo :

$$(A - \lambda I)x = \theta$$

y este proceso se repite para cada uno de los valores propios.

EJERCICIOS VALORES Y VECTORES PROPIOS DE UNA MATRIZ

[1] Muestre que los valores propios de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ son 0, 1 y 2

[2] Calcule los vectores propios de $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

[3] Obtenga los valores propios de la matriz antisimétrica
 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

[4] Calcule los valores y vectores propios de una matriz simétrica de orden 2 distinta de la nula.

[5] Analice la veracidad de la siguiente afirmación:

$\begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$ es un vector propio de $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ con valor propio asociado igual a $-\sqrt{2}$

[6] Calcule los valores propios de $A = \begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix}$, $a \in \mathbb{R} - \{0\}$

[7] Muestre que si $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ es simétrica y con elementos de la diagonal principal iguales, entonces sus valores propios son siempre reales.

[8] Calcule los vectores propios de $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

[9] Muestre que si A es una matriz cuadrada de orden 2, tal que

$$a_{ij} = \begin{cases} -1 & , \text{ si } i \leq j \\ 1 & , \text{ si } i > j \end{cases}$$

entonces A posee sólo valores propios complejos.

[10] Calcule los valores propios de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

[11] Muestre que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ posee valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, entonces $\det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n$

[12] Sea $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$. Obtenga los vectores propios de A

[13] Obtenga los valores y vectores propios de la matriz $A = \begin{bmatrix} 5 & -7 & 7 \\ 4 & -3 & 4 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

[14] Muestre que los valores propios de la matriz $\begin{bmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{bmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$, son números reales.

[15] Analice la veracidad de la afirmación: "Todas las matrices tridiagonales poseen solo valores propios reales".

[16] Explique si es verdad o mentira que si $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ es tal que $A^2 = A$, entonces sus valores propios son siempre complejos.

[17] Muestre que si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ es una matriz con $b \neq 0$ y m es una raíz de la ecuación $bm^2 + (a - d)m - c = 0$, entonces $a + bm$ es un valor propio de A con vector propio asociado $v = \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$

[18] Sea $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

a) Una matriz $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se dice *diagonal estrictamente dominante* ssi $|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|$; $i = 1, 2, \dots, n$.

Muestre que A es diagonal estrictamente dominante.

b) Obtenga los vectores propios de A .

PROBLEMAS RESUELTOS

VALORES Y VECTORES PROPIOS DE UNA MATRIZ

1

Muestre que los valores propios de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ son 0, 1 y 2

Solución:

Calculemos los valores propios de $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \left| \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = 0$$

$$\Rightarrow \left| \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = 0$$

$$\Rightarrow \left| \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \right| = 0 \Rightarrow (1-\lambda)^3 - (1-\lambda) = 0$$

$$\Rightarrow (1-\lambda) \left[(1-\lambda)^2 - 1 \right] = 0 \Rightarrow (1-\lambda) = 0 \vee (1-\lambda)^2 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 1 \vee 1 - 2\lambda + \lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1 \vee \lambda^2 - 2\lambda = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 1 \vee \lambda(\lambda - 2) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0 \vee \lambda_2 = 1 \vee \lambda_3 = 2$$

Esto muestra que los valores propios de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ son 0, 1 y 2.

2. ☐

Calcule los vectores propios de $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

Solución:

Calculemos los valores propios de $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

$$|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \left| \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (3-\lambda)(-2-\lambda) - 1 = 0 \Rightarrow -6 - \lambda + \lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - \lambda - 7 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1+28}}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{1 \pm \sqrt{29}}{2} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{1+\sqrt{29}}{2} \\ \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{29}}{2} \end{cases}$$

Calculemos los vectores propios asociados a $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{29}}{2}$:

$$(A - \lambda_1 I)\mathbf{x}_1 = \theta \Rightarrow \begin{bmatrix} 3-\lambda_1 & 1 \\ 1 & -2-\lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{29}}{2} & 1 \\ 1 & -\frac{5}{2} - \frac{\sqrt{29}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Si $a = \frac{5}{2}$ y $b = \frac{\sqrt{29}}{2}$, se tiene que :

$$\begin{bmatrix} a-b & 1 & 0 \\ 1 & -a-b & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2(-a+b)+F_1} \begin{bmatrix} 0 & a^2-b^2+1 & 0 \\ 1 & -a-b & 0 \end{bmatrix}$$

Pero : $a^2 - b^2 + 1 = \frac{25}{4} - \frac{29}{4} + 1 = -1 + 1 = 0$

$$x_{11} - \left(\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{29}}{2}\right)x_{12} = 0 \Rightarrow x_{11} = \left(\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{29}}{2}\right)x_{12}$$

$$\therefore \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{29}}{2}\right)x_{12} \\ x_{12} \end{bmatrix} = x_{12} \begin{bmatrix} \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{29}}{2} \\ 1 \end{bmatrix}, x_{12} \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Calculemos los vectores propios asociados a $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{29}}{2}$:

$$(A - \lambda_2 I)\mathbf{x}_2 = \theta \Rightarrow \begin{bmatrix} 3-\lambda_2 & 1 \\ 1 & -2-\lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{29}}{2} & 1 \\ 1 & -\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{29}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Si $a = \frac{5}{2}$ y $b = \frac{\sqrt{29}}{2}$, se tiene que :

$$\begin{bmatrix} a+b & 1 & 0 \\ 1 & -a+b & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2(-a-b)+F_1} \begin{bmatrix} 0 & a^2-b^2+1 & 0 \\ 1 & -a+b & 0 \end{bmatrix}$$

Sabemos ya que $a^2 - b^2 + 1 = 0$. Luego :

$$x_{21} - \left(\frac{5}{2} - \frac{\sqrt{29}}{2}\right)x_{22} = 0 \Rightarrow x_{21} = \left(\frac{5}{2} - \frac{\sqrt{29}}{2}\right)x_{22}$$

$$\therefore \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{5}{2} - \frac{\sqrt{29}}{2}\right)x_{22} \\ x_{22} \end{bmatrix} = x_{22} \begin{bmatrix} \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{29}}{2} \\ 1 \end{bmatrix}, x_{22} \in \mathbb{R} - \{0\} \quad \square$$

3

Obtenga los valores propios de la matriz antisimétrica $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

Solución:

Calculemos los valores propios de $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

$$|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & -1 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ 1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -\lambda^3 + 1 - 1 - \lambda - \lambda - \lambda = 0 \Rightarrow$$

$$-\lambda^3 - 3\lambda = 0 \Rightarrow -\lambda(\lambda^2 + 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = -\sqrt{3}i \\ \lambda_3 = \sqrt{3}i \end{cases} \quad \square$$

Calcule los valores y vectores propios de una matriz simétrica de orden 2 distinta de la nula.

Solución:

Sea $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ una matriz simétrica de orden 2, con a , b o c distinto de cero.

Calculemos los valores propios de A

$$|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \left| \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = 0 \Rightarrow \left| \begin{bmatrix} a - \lambda & b \\ b & c - \lambda \end{bmatrix} \right| = 0 \Rightarrow$$

$$(a - \lambda)(c - \lambda) - b^2 = 0 \Rightarrow ac - (a + c)\lambda + \lambda^2 - b^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda^2 - (a + c)\lambda + (ac - b^2) = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{(a+c) \pm \sqrt{(a+c)^2 - 4(ac-b^2)}}{2} \Rightarrow$$

$$\lambda = \frac{(a+c) \pm \sqrt{a^2 + 2ac + c^2 - 4ac + 4b^2}}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{(a+c) \pm \sqrt{a^2 - 2ac + c^2 + 4b^2}}{2} \Rightarrow$$

$$\lambda = \frac{(a+c) \pm \sqrt{(a-c)^2 + 4b^2}}{2}$$

Notamos que los valores propios son reales, porque $(a - c)^2 + 4b^2 \geq 0$

Los valores propios son : $\lambda_1 = \frac{(a+c) + \sqrt{(a-c)^2 + 4b^2}}{2}$ y $\lambda_2 = \frac{(a+c) - \sqrt{(a-c)^2 + 4b^2}}{2}$

Calculemos los vectores propios

Sean $P = (a - c)^2 + 4b^2$; $R = \frac{a}{2} - \frac{c}{2} - \frac{\sqrt{P}}{2}$; $S = \frac{a}{2} - \frac{c}{2} + \frac{\sqrt{P}}{2}$

$$\begin{bmatrix} a - \lambda_1 & b \\ b & c - \lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{a}{2} - \frac{c}{2} - \frac{\sqrt{P}}{2} & b & 0 \\ b & \frac{c}{2} - \frac{a}{2} - \frac{\sqrt{P}}{2} & 0 \end{bmatrix} \rightarrow F_1(-b/R) + F_2$$

$$\begin{bmatrix} \frac{a}{2} - \frac{c}{2} - \frac{\sqrt{P}}{2} & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x_{11} \left(\frac{a}{2} - \frac{c}{2} - \frac{\sqrt{P}}{2} \right) + bx_{12} = 0 \Rightarrow x_{12} = \frac{\frac{c}{2} - \frac{a}{2} - \frac{\sqrt{P}}{2}}{b} x_{11}$$

$$\therefore \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} \\ \frac{\frac{c}{2} - \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{P}}{2}}{b} x_{11} \end{bmatrix}, x_{11} \in \mathbb{R}$$

De manera similar :

$$\begin{bmatrix} a - \lambda_2 & b \\ b & c - \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{a}{2} - \frac{c}{2} + \frac{\sqrt{P}}{2} & b & 0 \\ b & \frac{c}{2} - \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{P}}{2} & 0 \end{bmatrix} \rightarrow F_1(-b/S) + F_2$$

$$\begin{bmatrix} \frac{a}{2} - \frac{c}{2} + \frac{\sqrt{P}}{2} & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x_{21} \left(\frac{c}{2} - \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{P}}{2} \right) + b x_{22} = 0 \Rightarrow x_{22} = \frac{\frac{c}{2} - \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{P}}{2}}{b} x_{21}$$

$$\therefore \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{21} \\ \frac{\frac{c}{2} - \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{P}}{2}}{b} x_{21} \end{bmatrix}, x_{21} \in \mathbb{R} \quad \square$$

5

Analice la veracidad de la siguiente afirmación:

$\begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$ es un vector propio de $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ con valor propio asociado igual a $-\sqrt{2}$

Solución:

Comprobemos si $A\mathbf{x}$ es igual a $\lambda\mathbf{x}$, donde $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$ y $\lambda = -\sqrt{2}$

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda\mathbf{x} = -\sqrt{2} \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ -2 \end{bmatrix}$$

Finalmente notamos que $A\mathbf{x} \neq \lambda\mathbf{x}$, y esto muestra que lo que se dice es falso. $\square$

6

Calcule los valores propios de $A = \begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix}$, $a \in \mathbb{R} - \{0\}$

Solución:

Calculemos los valores propios de $A = \begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix}$, con $a \neq 0$

$$|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \left| \begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = 0 \Rightarrow \left| \begin{bmatrix} a - \lambda & a \\ a & a - \lambda \end{bmatrix} \right| = 0 \Rightarrow$$

$$(a - \lambda)(a - \lambda) - a^2 = 0 \Rightarrow a^2 - 2a\lambda + \lambda^2 - a^2 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 2a\lambda = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda(\lambda - 2a) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0 \text{ ó } \lambda_2 = 2a$$

Finalmente, los valores propios de $A = \begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix}$, con $a \neq 0$ son $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 2a$ $\square$

7

Muestre que si $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ es simétrica y con elementos de la diagonal principal iguales, entonces sus valores propios son siempre reales.

Solución:

Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$, con $a \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R}$, una matriz de orden 2 simétrica con elementos en la diagonal principal iguales.

Calculemos los valores propios de A

$$|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ b & a - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (a - \lambda)(a - \lambda) - b^2 = 0 \Rightarrow$$

$$a^2 - 2a\lambda + \lambda^2 - b^2 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 2a\lambda + (a^2 - b^2) = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda = \frac{2a \pm \sqrt{4a^2 - 4(a^2 - b^2)}}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{2a \pm \sqrt{4a^2 - 4a^2 + 4b^2}}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{2a \pm \sqrt{4b^2}}{2} \Rightarrow$$

$$\lambda = \frac{2a \pm 2\sqrt{b^2}}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{2(a \pm |b|)}{2} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = a + |b| \in \mathbb{R} \\ \lambda_2 = a - |b| \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Lo anterior muestra que si $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ es simétrica y con elementos de la diagonal principal iguales, entonces sus valores propios son siempre reales. $\square$

8

Calcule los vectores propios de $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

Solución:

Calculemos los valores propios de $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

Dado que la matriz A es triangular sus valores propios son los elementos de la diagonal principal, es decir, $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 2$

Calculemos los vectores propios asociados

Para $\lambda_1 = 1$:

$$\begin{pmatrix} 1 - \lambda_1 & 0 \\ 0 & 2 - \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 - 1 & 0 \\ 0 & 2 - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De la segunda ecuación se tiene que $b = 0$. Luego los vectores propios asociados a $\lambda_1 = 1$ son $v_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$, con $a \neq 0$

Para $\lambda_2 = 2$:

$$\begin{pmatrix} 1 - \lambda_2 & 0 \\ 0 & 2 - \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 - 2 & 0 \\ 0 & 2 - 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De la primera ecuación se tiene que $-c = 0$, es decir, $c = 0$. Luego los vectores propios asociados a $\lambda_2 = 2$ son $v_2 = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ d \end{pmatrix}$, con $d \neq 0$ $\square$

11

Muestre que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ posee valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, entonces $\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$

Solución:

Sabemos que

$$\det(A - \lambda I) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda)$$

pues $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ son las raíces del polinomio anterior.

Luego, si consideramos en la expresión anterior que $\lambda = 0$, entonces $\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$ $\square$

12

Sea $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$. Obtenga los vectores propios de A .

Solución:

Antes de calcular los vectores propios de A , debemos calcular sus valores propios.

$$|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \left| \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = 0 \Rightarrow \left| \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & 6-\lambda \end{bmatrix} \right| = 0 \Rightarrow$$

$$(2-\lambda)(6-\lambda) - 3 = 0 \Rightarrow 12 - 8\lambda + \lambda^2 - 3 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 8\lambda + 9 = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda = \frac{8 \pm \sqrt{64-36}}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{8 \pm \sqrt{28}}{2} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 4 + \sqrt{7} \\ \lambda_2 = 4 - \sqrt{7} \end{cases}$$

Calculemos los vectores propios.

Para $\lambda_1 = 4 + \sqrt{7}$:

$$(A - \lambda_1 I) \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2-4-\sqrt{7} & 1 \\ 3 & 6-4-\sqrt{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} -2-\sqrt{7} & 1 \\ 3 & 2-\sqrt{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sabemos que este sistema posee infinitas soluciones, eso significa que podemos quedarnos con cualquiera de las dos ecuaciones y despejar una incógnita en términos de la otra.

De la primera ecuación, fijando x_{11} :

$$(-2-\sqrt{7})x_{11} + x_{21} = 0 \Rightarrow x_{21} = (2+\sqrt{7})x_{11}$$

Por lo tanto, los vectores propios asociados a $\lambda_1 = 4 + \sqrt{7}$ son :

$$\begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} \\ (2+\sqrt{7})x_{11} \end{bmatrix} = x_{11} \begin{bmatrix} 1 \\ 2+\sqrt{7} \end{bmatrix}$$

Para $\lambda_2 = 4 - \sqrt{7}$:

$$(A - \lambda_2 I) \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2-4+\sqrt{7} & 1 \\ 3 & 6-4+\sqrt{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} -2+\sqrt{7} & 1 \\ 3 & 2+\sqrt{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

De la primera ecuación, fijando x_{12} :

$$(-2 + \sqrt{7})x_{12} + x_{22} = 0 \Rightarrow x_{22} = (2 - \sqrt{7})x_{12}$$

Por lo tanto, los vectores propios asociados a $\lambda_2 = 4 - \sqrt{7}$ son :

$$\begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{12} \\ (2 - \sqrt{7})x_{12} \end{bmatrix} = x_{12} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 - \sqrt{7} \end{bmatrix} \quad \square$$

13

Obtenga los valores y vectores propios de la matriz $A = \begin{bmatrix} 5 & -7 & 7 \\ 4 & -3 & 4 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

Solución:

Calculemos los valores propios de $A = \begin{bmatrix} 5 & -7 & 7 \\ 4 & -3 & 4 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

$$|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \left| \begin{bmatrix} 5 & -7 & 7 \\ 4 & -3 & 4 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} 5 - \lambda & -7 & 7 \\ 4 & -3 - \lambda & 4 \\ 4 & -1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (5 - \lambda)(-3 - \lambda)(2 - \lambda) - 112 - 28$$

$$- 28(-3 - \lambda) + 4(5 - \lambda) + 28(2 - \lambda) = 0 \Rightarrow$$

$$(-15 - 2\lambda + \lambda^2)(2 - \lambda) + 20 - 4\lambda = 0 \Rightarrow$$

$$-30 + 11\lambda + 4\lambda^2 - \lambda^3 + 20 - 4\lambda = 0 \Rightarrow -\lambda^3 + 4\lambda^2 + 7\lambda - 10 = 0$$

Observamos que $\lambda = 1$ es raíz del polinomio característico

$$-\lambda^3 + 4\lambda^2 + 7\lambda - 10$$

Usando división sintética:

$$\begin{array}{r} -\lambda^3 + 4\lambda^2 + 7\lambda - 10 : \lambda - 1 = -\lambda^2 + 3\lambda + 10 \\ - (+)\lambda^3 + (-)\lambda^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3\lambda^2 + 7\lambda - 10 \\ (-)3\lambda^2 - (+)3\lambda \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10\lambda - 10 \\ (-)10\lambda - (+)10 \end{array}$$

$$0$$

Por lo tanto,

$$-\lambda^3 + 4\lambda^2 + 7\lambda - 10 = (\lambda - 1)(-\lambda^2 + 3\lambda + 10)$$

$$\text{Así, } -\lambda^3 + 4\lambda^2 + 7\lambda - 10 = 0 \Rightarrow (\lambda - 1)(-\lambda^2 + 3\lambda + 10) = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda_1 = 1, \quad -\lambda^2 + 3\lambda + 10 = 0$$

$$\text{Ahora: } -\lambda^2 + 3\lambda + 10 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 3\lambda - 10 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{3 \pm \sqrt{9+4(10)}}{2} \Rightarrow$$

$$\lambda = \frac{3 \pm \sqrt{49}}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{3 \pm 7}{2} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_2 = \frac{10}{2} = 5 \\ \lambda_3 = \frac{-4}{2} = -2 \end{cases}$$

Por lo tanto, los valores propios son : $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 5, \lambda_3 = -2$.

Calculemos los vectores propios.

Para $\lambda_1 = 1$:

$$(A - \lambda_1 I) x_1 = \theta \Rightarrow \begin{bmatrix} 5 - \lambda_1 & -7 & 7 \\ 4 & -3 - \lambda_1 & 4 \\ 4 & -1 & 2 - \lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 5 - 1 & -7 & 7 \\ 4 & -3 - 1 & 4 \\ 4 & -1 & 2 - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -7 & 7 \\ 4 & -4 & 4 \\ 4 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -7 & 7 \\ 4 & -4 & 4 \\ 4 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim_{F_{21}(-1), F_{31}(-1)} \begin{bmatrix} 4 & -7 & 7 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & -6 \end{bmatrix} \sim_{F_{32}(-2)} \begin{bmatrix} 4 & -7 & 7 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto,

$$3x_{12} - 3x_{13} = 0 \Rightarrow x_{12} = x_{13}$$

$$4x_{11} - 7x_{12} + 7x_{13} = 0 \Rightarrow 4x_{11} - 7x_{13} + 7x_{13} = 0 \Rightarrow x_{11} = 0$$

$$\therefore \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x_{13} \\ x_{13} \end{bmatrix} = x_{13} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, x_{13} \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Para $\lambda_2 = 5$:

$$(A - \lambda_2 I) x_2 = \theta \Rightarrow \begin{bmatrix} 5 - \lambda_2 & -7 & 7 \\ 4 & -3 - \lambda_2 & 4 \\ 4 & -1 & 2 - \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 5 - 5 & -7 & 7 \\ 4 & -3 - 5 & 4 \\ 4 & -1 & 2 - 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -7 & 7 \\ 4 & -8 & 4 \\ 4 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -7 & 7 \\ 4 & -8 & 4 \\ 4 & -1 & -3 \end{bmatrix} \sim_{F_{23}(-1)} \begin{bmatrix} 0 & -7 & 7 \\ 0 & -7 & 7 \\ 4 & -1 & -3 \end{bmatrix} \sim_{F_{12}(-1)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 7 \\ 4 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto,

$$-7x_{22} + 7x_{23} = 0 \Rightarrow x_{22} = x_{23}$$

$$4x_{21} - x_{22} - 3x_{23} = 0 \Rightarrow 4x_{21} - x_{23} - 3x_{23} = 0 \Rightarrow 4x_{21} = 4x_{23} \Rightarrow x_{21} = x_{23}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{23} \\ x_{23} \\ x_{23} \end{bmatrix} = x_{23} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, x_{23} \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Para $\lambda_3 = -2$:

$$(A - \lambda_3 I) x_3 = \theta \Rightarrow \begin{bmatrix} 5 - \lambda_3 & -7 & 7 \\ 4 & -3 - \lambda_3 & 4 \\ 4 & -1 & 2 - \lambda_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{31} \\ x_{32} \\ x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 5 - (-2) & -7 & 7 \\ 4 & -3 - (-2) & 4 \\ 4 & -1 & 2 - (-2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{31} \\ x_{32} \\ x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 7 & -7 & 7 \\ 4 & -1 & 4 \\ 4 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{31} \\ x_{32} \\ x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 7 & -7 & 7 \\ 4 & -1 & 4 \\ 4 & -1 & 4 \end{bmatrix} \sim_{F_{32}(-1)} \begin{bmatrix} 7 & -7 & 7 \\ 4 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim_{F_{21}(-\frac{4}{7})} \begin{bmatrix} 7 & -7 & 7 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto,

$$7x_{31} - 7x_{32} + 7x_{33} = 0 \Rightarrow 7x_{31} + 7x_{33} = 0 \Rightarrow x_{31} = -x_{33}$$

$$3x_{32} = 0 \Rightarrow x_{32} = 0$$

$$\therefore \begin{bmatrix} x_{31} \\ x_{32} \\ x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_{33} \\ 0 \\ x_{33} \end{bmatrix} = x_{33} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, x_{33} \in \mathbb{R} - \{0\} \quad \square$$

17

Muestre que si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ es una matriz con $b \neq 0$ y m es una raíz de la ecuación $bm^2 + (a - d)m - c = 0$, entonces $a + bm$ es un valor propio de A con vector propio asociado $v = \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$

Solución:

Tenemos que

$$Av = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + bm \\ c + dm \end{pmatrix}$$

y

$$\lambda v = (a + bm) \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + bm \\ (a + bm)m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + bm \\ am + bm^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + bm \\ c + dm \end{pmatrix},$$

pues $bm^2 + (a - d)m - c = 0 \Rightarrow bm^2 + am = c + dm$.

$\therefore Av = \lambda v$, es decir, $\lambda = a + bm$ es un valor propio de $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\square$

18

Sea $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

a) Una matriz $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se dice *diagonal estrictamente dominante* ssi $|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|$; $i = 1, 2, \dots, n$.

Muestre que A es diagonal estrictamente dominante

b) Obtenga los vectores propios de A .

Solución:

a) Verifiquemos si A es diagonal estrictamente dominante. Observe que $n = 2$.

$$i = 1 : |a_{11}| = |2| = 2 > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 1}}^2 |a_{1j}| = |a_{12}| = |1| = 1$$

$$i = 2 : |a_{22}| = |6| = 6 > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^2 |a_{ij}| = |a_{21}| = |3| = 3$$

De lo anterior, vemos que A es diagonal estrictamente dominante $\square$

b) Antes de calcular los vectores propios de A , debemos calcular sus valores propios.

$$|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \left| \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = 0 \Rightarrow \left| \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & 6-\lambda \end{bmatrix} \right| = 0 \Rightarrow$$

$$(2 - \lambda)(6 - \lambda) - 3 = 0 \Rightarrow 12 - 8\lambda + \lambda^2 - 3 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 8\lambda + 9 = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda = \frac{8 \pm \sqrt{64-36}}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{8 \pm \sqrt{28}}{2} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 4 + \sqrt{7} \\ \lambda_2 = 4 - \sqrt{7} \end{cases}$$

Calculemos los vectores propios.

Para $\lambda_1 = 4 + \sqrt{7}$:

$$(A - \lambda_1 I) \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 - 4 - \sqrt{7} & 1 \\ 3 & 6 - 4 - \sqrt{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} -2 - \sqrt{7} & 1 \\ 3 & 2 - \sqrt{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sabemos que este sistema posee infinitas soluciones, eso significa que podemos quedarnos con cualquiera de las dos ecuaciones y despejar una incógnita en términos de la otra.

De la primera ecuación, fijando x_{11} :

$$(-2 - \sqrt{7})x_{11} + x_{21} = 0 \Rightarrow x_{21} = (2 + \sqrt{7})x_{11}$$

Por lo tanto, los vectores propios asociados a $\lambda_1 = 4 + \sqrt{7}$ son :

$$\begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} \\ (2 + \sqrt{7})x_{11} \end{bmatrix} = x_{11} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 + \sqrt{7} \end{bmatrix}$$

Para $\lambda_2 = 4 - \sqrt{7}$:

$$(A - \lambda_2 I) \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 - 4 + \sqrt{7} & 1 \\ 3 & 6 - 4 + \sqrt{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} -2 + \sqrt{7} & 1 \\ 3 & 2 + \sqrt{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

De la primera ecuación, fijando x_{12} :

$$(-2 + \sqrt{7})x_{12} + x_{22} = 0 \Rightarrow x_{22} = (2 - \sqrt{7})x_{12}$$

Por lo tanto, los vectores propios asociados a $\lambda_2 = 4 - \sqrt{7}$ son :

$$\begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{12} \\ (2 - \sqrt{7})x_{12} \end{bmatrix} = x_{12} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 - \sqrt{7} \end{bmatrix} \quad \square$$

RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS NO RESUELTOS VALORES Y VECTORES PROPIOS DE UNA MATRIZ

[10] $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \frac{1+\sqrt{13}}{2}, \lambda_3 = \frac{1-\sqrt{13}}{2}$

[15] Falso. Contraejemplo: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

[16] Falso. Contraejemplo: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

GUÍA DE PRÁCTICO N°5

APLICACIONES

Teoría Aplicaciones

50 Codificación y decodificación de mensajes

Podemos codificar y decodificar mensajes usando matrices.

La primera etapa consiste en crear una tabla de equivalencias entre caracteres y números.

La tabla que consideraremos es la siguiente

$0 = \text{espacio}$	$7 = G$	$14 = N$	$21 = T$
$1 = A$	$8 = H$	$15 = \tilde{N}$	$22 = U$
$2 = B$	$9 = I$	$16 = O$	$23 = V$
$3 = C$	$10 = J$	$17 = P$	$24 = W$
$4 = D$	$11 = K$	$18 = Q$	$25 = X$
$5 = E$	$12 = L$	$19 = R$	$26 = Y$
$6 = F$	$13 = M$	$20 = S$	$27 = Z$

La tabla anterior es arbitraria, pudiendo agregar o quitar caracteres, o numerar de un modo distinto, si así se quiere.

La segunda etapa consiste en convertir nuestro mensaje en una lista de números, de modo que una vez que lo transformemos en una matriz M_o , podamos realizar el producto $M_o A$, donde A es una matriz invertible de orden n , elegida arbitrariamente por la persona que quiere codificar el mensaje. Si el mensaje original no es lo suficientemente largo para completar la matriz, se rellena con ceros.

Es habitual que la matriz A sea de orden 3, por simplicidad.

El mensaje codificado M_c habitualmente se expresa como una lista de números ordenados en una matriz fila.

Para decodificar el mensaje, es decir, obtener el mensaje original, se calcula

$$M_o = M_c A^{-1}$$

donde A^{-1} es la inversa de la matriz A .

Por ejemplo, codifiquemos el mensaje NOS VEMOS MAÑANA, usando la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ que posee inversa, pues } \det(A) = 1.$$

Usando la tabla de equivalencias, obtenemos los números

[14, 16, 20, 0, 23, 5, 13, 16, 20, 0, 13, 1, 15, 1, 14, 1]

Tenemos 16 números, y la matriz M_o debe contar con 3 columnas, por lo que M_o debe ser de orden 6×3 . Comenzamos a completar la matriz desde la esquina superior izquierda, es decir, posición (1, 1), y luego avanzando fila por fila.

$$\text{Luego } M_o = \begin{bmatrix} 14 & 16 & 20 \\ 0 & 23 & 5 \\ 13 & 16 & 20 \\ 0 & 13 & 1 \\ 15 & 1 & 14 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{6 \times 3}$$

$$\text{Así } M_c = M_o A = \begin{bmatrix} 14 & 16 & 20 \\ 0 & 23 & 5 \\ 13 & 16 & 20 \\ 0 & 13 & 1 \\ 15 & 1 & 14 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 52 & 10 & 16 \\ 51 & 18 & 23 \\ 52 & 9 & 16 \\ 27 & 12 & 13 \\ 16 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

El mensaje codificado como matriz fila es

[52, 10, 16, 51, 18, 23, 52, 9, 16, 27, 12, 13, 16, 2, 1, 0, 1, 0]

Ahora si queremos decodificar el mensaje anterior, se ocupa la expresión

$$M_o = M_c A^{-1}$$

Si calculamos A^{-1} usando alguno de los métodos conocidos, se obtiene

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Luego } M_o = M_c A^{-1} = \begin{bmatrix} 52 & 10 & 16 \\ 51 & 18 & 23 \\ 52 & 9 & 16 \\ 27 & 12 & 13 \\ 16 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 16 & 20 \\ 0 & 23 & 5 \\ 13 & 16 & 20 \\ 0 & 13 & 1 \\ 15 & 1 & 14 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Esta última matriz se traduce a caracteres, usando la tabla de equivalencia, comenzando desde el elemento en la posición (1,1), y avanzando fila por fila.

51 Análisis de redes

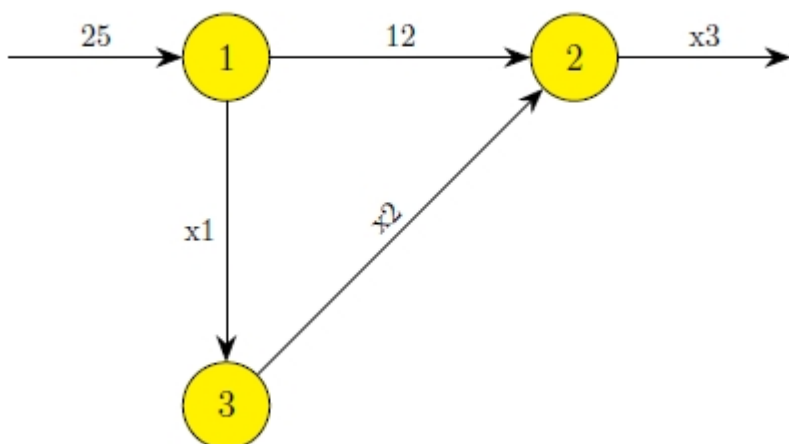
Una red se compone de un número finito de nodos, y de flechas que interconectan estos nodos y que indican el sentido del flujo en cada nodo. Es común representar los nodos mediante círculos numerados, e indicar en las flechas la cantidad de flujo que pasa por el camino asociado a la flecha.

La ley fundamental que rige a estas redes es:

"Lo que entra a un nodo es igual a lo que sale"

Esta ley permite en una red, generar para cada nodo una ecuación, formando de ese modo un sistema de ecuaciones lineales, que debemos resolver para obtener los flujos desconocidos en cada camino indicado por las flechas.

Por ejemplo, si tenemos la red



se obtiene la siguiente información para cada nodo

Nodo 1: Entra 25 y sale $12 + x_1$, es decir

$$25 = 12 + x_1$$

Nodo 2: Entra $12 + x_2$ y sale x_3 , es decir

$$12 + x_2 = x_3$$

Nodo 3: Entra x_1 y sale x_2 , es decir

$$x_1 = x_2$$

Hemos obtenido el sistema de ecuaciones lineales

$$25 = 12 + x_1 \quad (1)$$

$$12 + x_2 = x_3 \quad (2)$$

$$x_1 = x_2 \quad (3)$$

De (1) : $x_1 = 25 - 12 = 13$

De (3) : $x_2 = x_1 = 13$

De (2) : $x_3 = 12 + x_2 = 12 + 13 = 25$

Esto muestra que los flujos desconocidos son

$$x_1 = 13, x_2 = 13 \text{ y } x_3 = 25$$

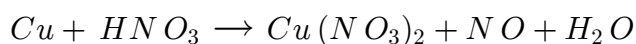
T 52 Balanceo de ecuaciones químicas

Para balancear una ecuación química podemos utilizar el método algebraico, que consiste en asignar incógnitas a los distintos compuestos (que puede ser un elemento) presentes en la ecuación química, y luego multiplicamos cada

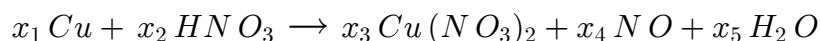
incógnita por el número de átomos para cada elemento presente en los compuestos, recordando que en una reacción química se cumple la ley de conservación de la materia (Ley de Lavoisier), es decir, los reactantes deben ser iguales a los productos, o expresado de otra forma, los reactantes menos los productos es igual a cero.

El objetivo al balancear una ecuación química es obtener los coeficientes estequiométricos, que se corresponden con las incógnitas asignadas a cada compuesto.

Por ejemplo, para balancear la ecuación química



asignamos a cada compuesto una incógnita, es decir



Ahora para cada elemento químico escribimos la ecuación correspondiente, recordando que los reactantes menos los productos es igual a cero

$$Cu : x_1 - x_3 = 0 \quad (1)$$

$$H : x_2 - 2 x_5 = 0 \quad (2)$$

$$N : x_2 - 2 x_3 - x_4 = 0 \quad (3)$$

$$O : 3 x_2 - 6 x_3 - x_4 - x_5 = 0 \quad (4)$$

Escribiendo el sistema homogéneo anterior en forma matricial, se tiene

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow F_2(-1)+F_3; F_2(-3)+F_4$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -1 & 5 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow F_3(-3)+F_4$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Hagamos $x_5 = 2$ (el sistema posee infinitas soluciones)

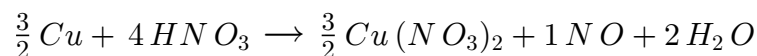
$$2x_4 = x_5 \Rightarrow x_4 = \frac{1}{2} x_5 = 1$$

$$-2x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \Rightarrow 2x_3 = 2x_5 - x_4 = 4 - 1 = 3 \Rightarrow x_3 = \frac{3}{2}$$

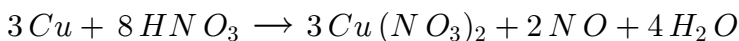
$$x_2 - 2x_5 = 0 \Rightarrow x_2 = 2x_5 = 4$$

$$x_1 - x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = x_3 = \frac{3}{2}$$

Reemplazando estos valores en la ecuación química



Ahora, dado que los coeficientes estequiométricos generalmente deben ser números naturales, podemos multiplicar la ecuación anterior por 2, obteniendo finalmente



I 53 Cónicas y Cuádricas

La ecuación general de una sección cónica es

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (1)$$

donde A, B, C, D, E y F son constantes reales.

Si conocemos suficientes puntos del plano por donde pasa la cónica, entonces podremos obtener las constantes anteriores, y de ese modo determinar la cónica correspondiente.

Por otro lado, la ecuación general de una superficie cuádrica es

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0 \quad (2)$$

donde $A, B, C, D, E, F, G, H, I$ y J son constantes reales.

Si conocemos suficientes puntos del espacio por donde pasa la cuádrica, entonces podremos obtener las constantes anteriores, y de ese modo determinar la superficie cuádrica correspondiente.

Al reemplazar las coordenadas de los puntos en la ecuación (1) ó (2), obtenemos sistemas de ecuaciones lineales, cuyas incógnitas son las constantes de las ecuaciones anteriores.

Por ejemplo, para obtener la circunferencia que pasa por los puntos $(3, 3)$, $(4, 2)$ y $(4, 4)$, debemos recordar que la ecuación general de una circunferencia es $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$, y si reemplazamos las coordenadas de los puntos dados en la ecuación anterior, se tiene el sistema

$$9 + 9 + 3D + 3E + F = 0 \Rightarrow 3D + 3E + F = -18$$

$$16 + 4 + 4D + 2E + F = 0 \Rightarrow 4D + 2E + F = -20$$

$$16 + 16 + 4D + 4E + F = 0 \Rightarrow 4D + 4E + F = -32$$

En la forma matricial $Ax = b$

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D \\ E \\ F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ -20 \\ -32 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 6 + 12 + 16 - 8 - 12 - 12 = 2 \neq 0$$

Usando el método de Cramer

$$D = \frac{\begin{vmatrix} -18 & 3 & 1 \\ -20 & 2 & 1 \\ -32 & 4 & 1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{-36 - 96 - 80 + 64 + 72 + 60}{2} = -\frac{16}{2} = -8$$

$$E = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -18 & 1 \\ 4 & -20 & 1 \\ 4 & -32 & 1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{-60 - 72 - 128 + 80 + 96 + 72}{2} = -\frac{12}{2} = -6$$

$$F = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 3 & -18 \\ 4 & 2 & -20 \\ 4 & 4 & -32 \end{vmatrix}}{2} = \frac{-192-240-288+144+240+384}{2} = \frac{48}{2} = 24$$

Luego, la ecuación de la circunferencia es $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 24 = 0$

Si quisiéramos obtener la forma canónica, completamos cuadrados

$$x^2 + y^2 - 8x - 6y + 24 = 0 \Rightarrow (x^2 - 8x) + (y^2 - 6y) = -24 \Rightarrow$$

$$(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = -24 + 16 + 9 \Rightarrow (x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 1$$

T 54 Recta de Regresión Lineal usando Mínimos Cuadrados

Si nuestro objetivo es obtener la recta de regresión lineal $y = a + bx$, usando el método de mínimos cuadrados, entonces debemos considerar n puntos distintos

$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$, con $n \neq 1$ y $x_1 < x_2 < \dots < x_n$

Considerando lo anterior, la recta $y = a + bx$ de mejor ajuste tendrá coeficientes a y b dados por $\mathbf{v} = (A^T A)^{-1} A^T \mathbf{y}$, donde

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}_{2 \times 1}, A = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ 1 & x_n \end{bmatrix}_{n \times 2}, \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{bmatrix}_{n \times 1}$$

Por ejemplo, si tenemos el conjunto de datos experimentales siguiente

i	1	2	3
x_i	2	4	7
y_i	-1	3	4

podemos obtener los coeficientes a y b de la recta de regresión $y = a + bx$ calculando $\mathbf{v} = (A^T A)^{-1} A^T \mathbf{y}$, con

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}_{2 \times 1}, A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}_{3 \times 2} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}_{3 \times 1}$$

Luego

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 13 \\ 13 & 69 \end{bmatrix}$$

$$(A^T A)^{-1} = \frac{1}{38} \begin{bmatrix} 69 & -13 \\ -13 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(A^T A)^{-1} A^T = \frac{1}{38} \begin{bmatrix} 69 & -13 \\ -13 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 7 \end{bmatrix} = \frac{1}{38} \begin{bmatrix} 43 & 17 & -22 \\ -7 & -1 & 8 \end{bmatrix}$$

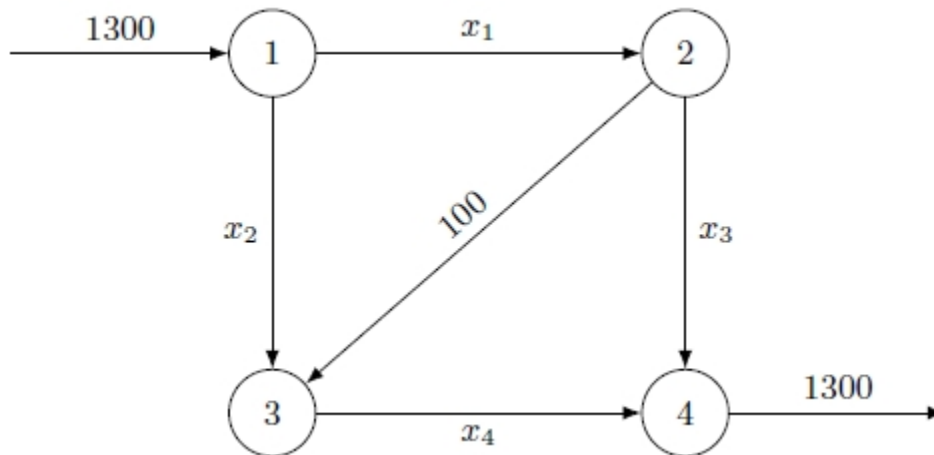
$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = (A^T A)^{-1} A^T \mathbf{y} = \frac{1}{38} \begin{bmatrix} 43 & 17 & -22 \\ -7 & -1 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{38} \begin{bmatrix} -80 \\ 36 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} -\frac{80}{38} \\ \frac{36}{38} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{40}{19} \\ \frac{18}{19} \end{bmatrix}$$

Finalmente $a = -\frac{40}{19}$, $b = \frac{18}{19}$ y la recta de mejor ajuste para los datos dados es $y = a + b x = -\frac{40}{19} + \frac{18}{19} x$

EJERCICIOS APLICACIONES

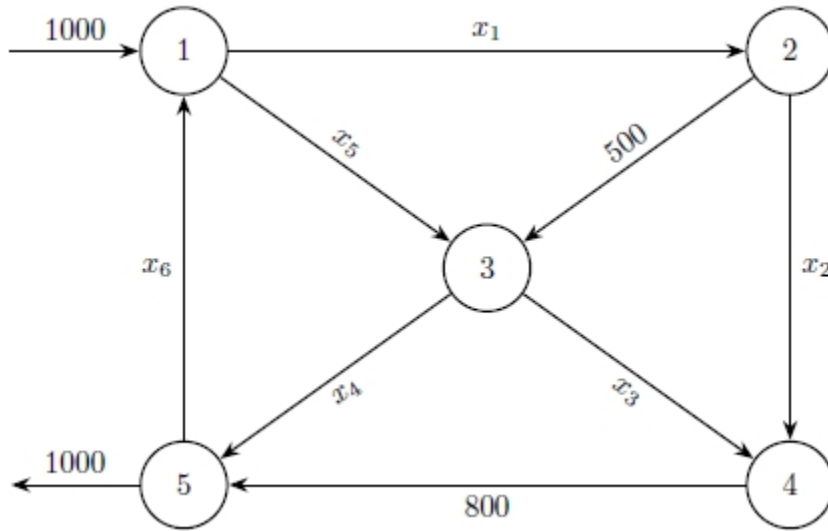
[1] Si la inversa de la matriz asociada a una palabra codificada de 9 letras, usando $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix}$, es $M_c^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-126}{1291} & \frac{127}{1291} & \frac{44}{1291} \\ \frac{229}{6455} & \frac{-81}{1291} & \frac{2}{6455} \\ \frac{351}{12910} & \frac{169}{2582} & \frac{-307}{12910} \end{bmatrix}$, entonces muestre que la palabra original contiene una L

[2] El agua fluye a través de una red de tuberías, en miles de metros cúbicos por hora, como se muestra en la siguiente figura



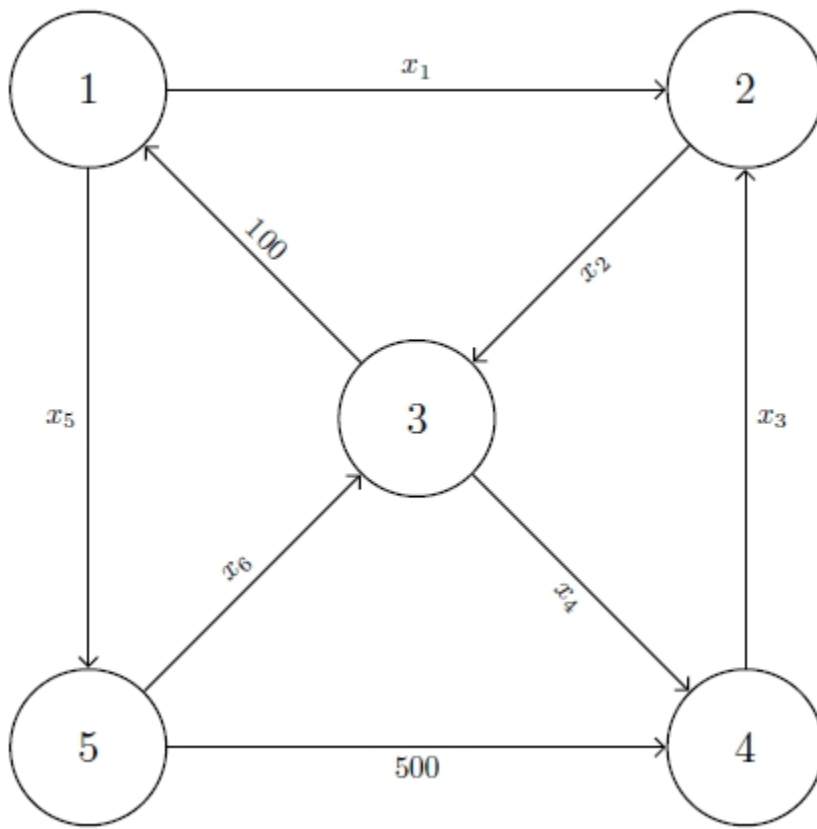
- Calcule el flujo de agua donde es desconocido.
- Calcule el flujo cuando $x_3 = 200$. Explique brevemente lo que sucede en este caso.

[3] El agua fluye a través de una red de tuberías, en miles de metros cúbicos por hora, como se muestra en la siguiente figura



- Calcule el flujo de agua donde es desconocido.
- Calcule el flujo cuando $x_3 = 0$, $x_4 = 200$. Explique lo que sucede en este caso.
- Calcular el flujo de agua cuando $x_2 = 1400$ y $x_5 = 1000$.

[4] El agua fluye a través de una red de tuberías, en miles de metros cúbicos por hora, como se muestra en la siguiente figura



- a) Obtenga los flujos desconocidos
b) Calcule el flujo cuando $x_4 = 1000$ y $x_6 = 300$. Explique lo que sucede en este caso.

[5] Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ se obtiene el mensaje codificado

$\bar{x}$ y si se usa la matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ se obtiene $\bar{y}$.

Si $\bar{x} + \bar{y} = \begin{bmatrix} 50 & 45 & 56 \\ 62 & 9 & 92 \\ 32 & 82 & 36 \\ 24 & 86 & 20 \\ 32 & -16 & 64 \end{bmatrix}$, entonces muestre que el mensaje original

contiene una U

[6] Obtenga el mensaje

$[21, 2, 13, 12, 59, 87, 41, -18, 21, -2, 31, 5, -3, 35, 29, 27, 1, 81, 2, -1, 1],$

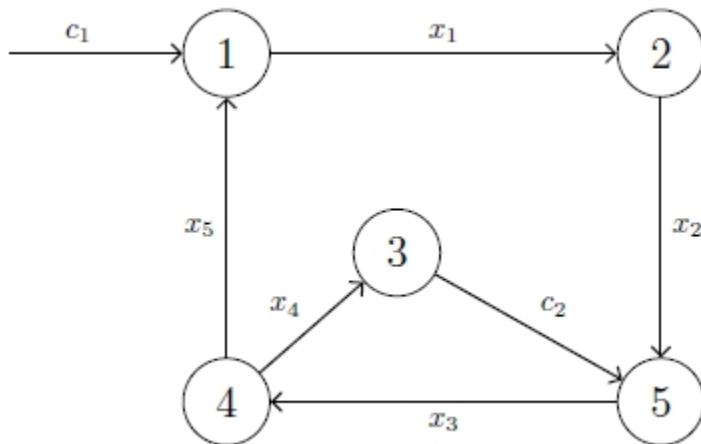
decodificándolo con $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

[7] Muestre que el mensaje codificado

$[4, 32, 36, -2, 30, 19, 15, -30, 65, 1, -2, 55, 11, 30, 19],$

usando $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, contiene exactamente 6 vocales

[8] Dada la red, con c_1 y c_2 constantes reales conocidas,



calcule los flujos desconocidos.

[9] Decodifique el mensaje :

$[11, 6, -9, 21, 21, -16, 63, 42, -41, 14, 5, -13, 40, 40, -19, 36, 32, -20, 32, 32, -20, 36, 16, -36, 14, 5, -13, 20, 20, -20]$

usando la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

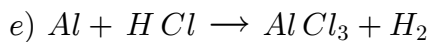
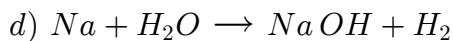
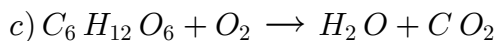
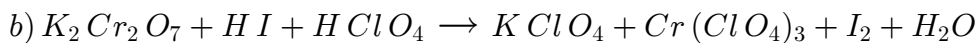
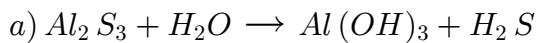
[10] Muestre que al decodificar el mensaje $[21, 3, 4, 37, 26, -21]$,

con $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, encontraremos una T

[11] Codifique el siguiente mensaje "EL SEGUNDO CERTAMEN ES FACIL",

usando $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

[12] Usando sistemas de ecuaciones lineales, balancee las ecuaciones químicas siguientes



[13] Obtenga la ecuación de la cónica que pasa por los puntos $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(2, 1)$, $(-1, 2)$ y $(-1, -1)$

[14] Obtenga la ecuación de una hipérbola que pase por los puntos $(2, 1)$, $(3, 0)$, $(-1, 5)$ y $(0, -3)$

[15] Obtenga la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $(1, 1)$, $(-2, 5)$ y $(3, 4)$

[16] Obtenga la recta de regresión lineal si tenemos el conjunto de datos experimentales siguiente

x_i	1	3	4	7	8	10
y_i	20	18	12	10	9	5

[17] Usando el método de mínimos cuadrados obtenga la recta de regresión lineal para los datos

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
y_i	15	5	18	10	12	8	14	6

[18] Obtenga la recta de regresión si conocemos los siguientes datos

x_i	1	3	7	9
y_i	-2	-4	5	1

[19] Decodifique el mensaje :

$[-15; -10; 25; -25; 1; 19; -2; -28; 30; -36; 11; 4; 9; -35; 17; -18; -2; 20]$

que se obtuvo con $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, usando para calcular la inversa

a) operaciones elementales

b) la adjunta

PROBLEMAS RESUELTOS APLICACIONES

1

Si la inversa de la matriz asociada a una palabra codificada de 9 letras, usando

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix}, \text{ es } M_c^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-126}{1291} & \frac{127}{1291} & \frac{44}{1291} \\ \frac{229}{6455} & \frac{-81}{1291} & \frac{2}{6455} \\ \frac{351}{12910} & \frac{169}{2582} & \frac{-307}{12910} \end{bmatrix}, \text{ entonces muestre que la}$$

palabra original contiene una L

Solución:

Sean M_o el mensaje original y M_c el mensaje codificado. Se tiene que :

$$M_o \cdot A = M_c \Rightarrow A^{-1} \cdot M_o^{-1} = M_c^{-1} \Rightarrow M_o^{-1} = A \cdot M_c^{-1} \Rightarrow M_o = (A \cdot M_c^{-1})^{-1}$$

$$\text{Ahora, } A \cdot M_c^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{-126}{1291} & \frac{127}{1291} & \frac{44}{1291} \\ \frac{229}{6455} & \frac{-81}{1291} & \frac{2}{6455} \\ \frac{351}{12910} & \frac{169}{2582} & \frac{-307}{12910} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-10}{1291} & \frac{215}{1291} & \frac{-17}{1291} \\ \frac{116}{1291} & \frac{88}{1291} & \frac{-61}{1291} \\ \frac{-23}{1291} & \frac{-151}{1291} & \frac{90}{1291} \end{bmatrix}$$

$$\text{Así, } M_o = (A \cdot M_c^{-1})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-10}{1291} & \frac{215}{1291} & \frac{-17}{1291} \\ \frac{116}{1291} & \frac{88}{1291} & \frac{-61}{1291} \\ \frac{-23}{1291} & \frac{-151}{1291} & \frac{90}{1291} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 13 & 9 \\ 7 & 1 & 2 \\ 12 & 5 & 20 \end{bmatrix}$$

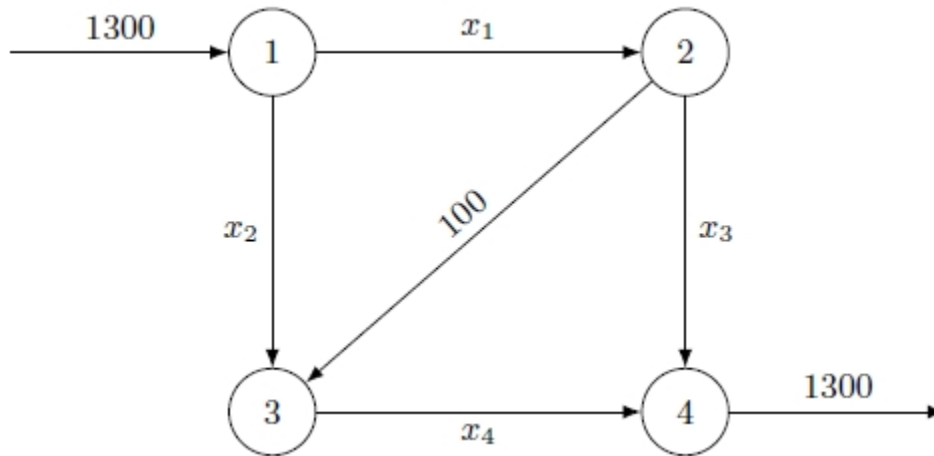
Recordemos la tabla de equivalencias

$0 = \text{espacio}$	$7 = G$	$14 = N$	$21 = T$
$1 = A$	$8 = H$	$15 = \tilde{N}$	$22 = U$
$2 = B$	$9 = I$	$16 = O$	$23 = V$
$3 = C$	$10 = J$	$17 = P$	$24 = W$
$4 = D$	$11 = K$	$18 = Q$	$25 = X$
$5 = E$	$12 = L$	$19 = R$	$26 = Y$
$6 = F$	$13 = M$	$20 = S$	$27 = Z$

El mensaje es AMIGABLES , que efectivamente contiene una L □

2

El agua fluye a través de una red de tuberías, en miles de metros cúbicos por hora, como se muestra en la siguiente figura



- Calcule el flujo de agua donde es desconocido.
- Calcule el flujo cuando $x_3 = 200$. Explique brevemente lo que sucede en este caso.

Solución:

Nodo 1 : $1300 = x_1 + x_2$

Nodo 2 : $x_1 = 100 + x_3$

Nodo 3 : $100 + x_2 = x_4$

Nodo 4 : $x_3 + x_4 = 1300$

Luego, el sistema a resolver es :

$$x_1 + x_2 = 1300$$

$$x_1 - x_3 = 100$$

$$x_2 - x_4 = -100$$

$$x_3 + x_4 = 1300$$

Matricialmente :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1300 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 100 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -100 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1300 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1(-1)+F_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1300 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1200 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -100 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1300 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2(1)+F_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1300 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1200 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1300 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1300 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3(1)+F_4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1300 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1200 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1300 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Observamos que $\text{rango}(A : \mathbf{b}) = 3 = \text{rango}(A) < n = 4$, por lo tanto, debemos fijar $n - r = 4 - 3 = 1$ incógnita.

El sistema equivalente que resolveremos es :

$$x_1 + x_2 = 1300 \quad (1)$$

$$-x_2 - x_3 = -1200 \quad (2)$$

$$-x_3 - x_4 = -1300 \quad (3)$$

Fijemos x_4 .

$$\text{De (3)} : x_3 = 1300 - x_4$$

$$\text{De (2)} : x_2 = 1200 - x_3 = 1200 - 1300 + x_4 = x_4 - 100$$

$$\text{De (1)} : x_1 = 1300 - x_2 = 1300 - x_4 + 100 = 1400 - x_4$$

$$a) \text{ El vector solución es : } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1400 - x_4 \\ x_4 - 100 \\ 1300 - x_4 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad \square$$

b) Cuando $x_3 = 200$, se tiene que

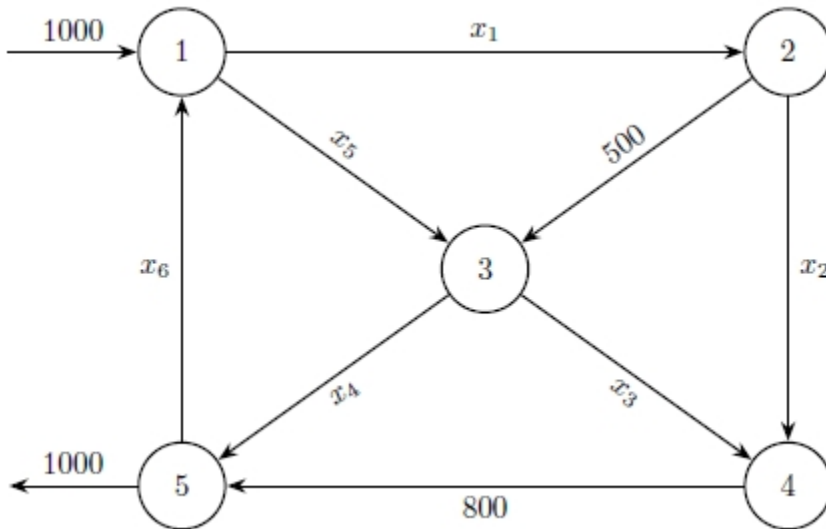
$$x_3 = 1300 - x_4 \Rightarrow 200 = 1300 - x_4 \Rightarrow x_4 = 1300 - 200 \Rightarrow x_4 = 1100$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1400 - 1100 \\ 1100 - 100 \\ 1300 - 1100 \\ 1100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 300 \\ 1000 \\ 200 \\ 1100 \end{bmatrix}$$

De los 1300 que entran por el nodo 1 se distribuyen 300 para el nodo 2 y 1000 para el nodo 3, luego del nodo 3 salen 1100 para el nodo 4, que es alimentado además por el nodo 2 con 200 que completan los 1300 que son expulsados por el nodo 4 $\square$

3

El agua fluye a través de una red de tuberías, en miles de metros cúbicos por hora, como se muestra en la siguiente figura



- Calcule el flujo de agua donde es desconocido
- Calcule el flujo cuando $x_3 = 0$, $x_4 = 200$. Explique lo que sucede en este caso
- Calcular el flujo de agua cuando $x_2 = 1400$ y $x_5 = 1000$

Solución:

Nodo 1 : $1000 + x_6 = x_1 + x_5$

Nodo 2 : $x_1 = 500 + x_2$

Nodo 3 : $500 + x_5 = x_3 + x_4$

Nodo 4 : $x_2 + x_3 = 800$

Nodo 5 : $800 + x_4 = 1000 + x_6$

El sistema asociado será :

$$x_1 + x_5 - x_6 = 1000 \quad (1)$$

$$x_1 - x_2 = 500 \quad (2)$$

$$x_3 + x_4 - x_5 = 500 \quad (3)$$

$$x_2 + x_3 = 800 \quad (4)$$

$$x_4 - x_6 = 200 \quad (5)$$

Matricialmente :

$$\begin{array}{c} x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5 \quad x_6 \quad b \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1000 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 500 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 500 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 800 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 200 \end{array} \right] \end{array} \rightarrow F_{43}$$

$$\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1000 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 500 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 800 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 500 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 200 \end{array} \right] \rightarrow F_1(-1)+F_2$$

$$\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1000 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -500 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 800 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 500 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 200 \end{array} \right] \rightarrow F_2(1)+F_3$$

$$\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1000 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -500 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 300 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 500 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 200 \end{array} \right] \rightarrow F_3(-1)+F_4$$

$$\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1000 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -500 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 300 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 200 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 200 \end{array} \right] \rightarrow F_4(-1)+F_5$$

$$\begin{array}{c} x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5 \quad x_6 \quad b \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1000 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -500 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 300 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 200 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{array}$$

Por lo tanto, $\text{rango}(A : \mathbf{b}) = \text{rango}(A) = 4 < n = 6$. Debemos fijar $n - r = 6 - 4 = 2$ incógnitas. Fijemos x_3 y x_4

$$\text{De (4) : } x_4 - x_6 = 200 \Rightarrow x_6 = x_4 - 200$$

$$\begin{aligned} \text{De (3) : } x_3 - x_5 + x_6 &= 300 \Rightarrow x_5 = x_3 + x_6 - 300 \Rightarrow \\ x_5 &= x_3 + x_4 - 200 - 300 \Rightarrow x_5 = x_3 + x_4 - 500 \end{aligned}$$

$$\text{De (2) : } -x_2 - x_5 + x_6 = -500 \Rightarrow x_2 = 500 + x_6 - x_5 \Rightarrow$$

$$x_2 = 500 + x_4 - 200 - x_3 - x_4 + 500 \Rightarrow x_2 = 800 - x_3$$

$$\begin{aligned} \text{De (1) : } x_1 + x_5 - x_6 &= 1000 \Rightarrow x_1 = 1000 + x_6 - x_5 \Rightarrow \\ x_1 &= 1000 + x_4 - 200 - x_3 - x_4 + 500 \Rightarrow x_1 = 1300 - x_3 \end{aligned}$$

$$a) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1300 - x_3 \\ 800 - x_3 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_3 + x_4 - 500 \\ x_4 - 200 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1300 \\ 800 \\ 0 \\ 0 \\ -500 \\ -200 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$x_3, x_4 \in \mathbb{R} \quad \square$$

$$b) x_3 = 0, x_4 = 200 \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1300 \\ 800 \\ 0 \\ 200 \\ -300 \\ 0 \end{bmatrix}$$

El flujo $x_5 = -300$ se da porque ingresa al nodo 1 : $x_6 + 1000 = 0 + 1000 = 1000$, pero el flujo x_1 que sale del nodo 1 se lleva 1300 quedando deficitario, es decir, necesitamos alimentar el nodo 1 con un mayor flujo de entrada (a lo menos 300 mil metros cúbicos por hora adicionales) $\square$

$$c) x_2 = 800 - x_3 = 1400 \quad (*)$$

$$x_5 = x_3 + x_4 - 500 = 1000 \quad (**)$$

De (*) se tiene que : $x_3 = 800 - 1400 = -600$

Reemplazando en (**) :

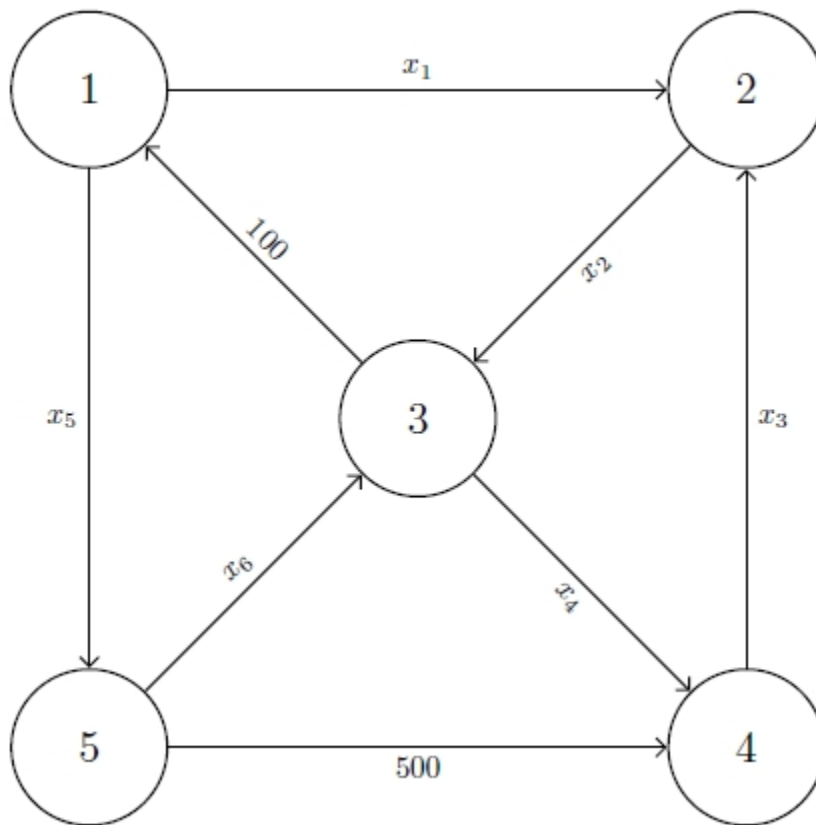
$$x_4 = 1000 + 500 - x_3 = 1500 - (-600) = 1500 + 600 = 2100$$

Por lo tanto,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1300 - (-600) \\ 1400 \\ -600 \\ 2100 \\ 1000 \\ 2100 - 200 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1900 \\ 1400 \\ -600 \\ 2100 \\ 1000 \\ 1900 \end{bmatrix} \quad \square$$

4

El agua fluye a través de una red de tuberías, en miles de metros cúbicos por hora, como se muestra en la siguiente figura



- Obtenga los flujos desconocidos
- Calcule el flujo cuando $x_4 = 1000$ y $x_6 = 300$. Explique lo que sucede en este caso.

Solución:

a)

$$\text{Nodo 1 : } 100 = x_1 + x_5 \Rightarrow x_1 + x_5 = 100$$

$$\text{Nodo 2 : } x_1 + x_3 = x_2 \Rightarrow x_1 - x_2 + x_3 = 0$$

$$\text{Nodo 3 : } x_2 + x_6 = x_4 + 100 \Rightarrow x_2 - x_4 + x_6 = 100$$

$$\text{Nodo 4 : } x_4 + 500 = x_3 \Rightarrow x_3 - x_4 = 500$$

$$\text{Nodo 5 : } x_5 = x_6 + 500 \Rightarrow x_5 - x_6 = 500$$

El sistema anterior escrito en forma matricial es :

$$\begin{array}{l} \begin{array}{cccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & b \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 100 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 100 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 500 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 500 \end{array} \xrightarrow{F_1(-1)+F_2} \begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 100 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & -100 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 100 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 500 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 500 \end{array} \\ \\ \xrightarrow{F_2(1)+F_3} \begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 100 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & -100 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 500 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 500 \end{array} \xrightarrow{F_3(-1)+F_4} \begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 100 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & -100 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 500 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 500 \end{array} \\ \\ \xrightarrow{F_4(-1)+F_5} \begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 100 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & -100 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 500 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \end{array}$$

Observamos que $\text{rango}(A) = \text{rango}(A : b) = 4 < n = 6$. Debemos fijar $6 - 4 = 2$ incógnitas. Fijemos x_6 y x_4 .

El sistema equivalente finalmente obtenido es :

$$x_1 + x_5 = 100 \quad (1)$$

$$-x_2 + x_3 - x_5 = -100 \quad (2)$$

$$x_3 - x_4 - x_5 + x_6 = 0 \quad (3)$$

$$x_5 - x_6 = 500 \quad (4)$$

$$\text{De (4) : } x_5 = 500 + x_6$$

$$\text{De (3) : } x_3 = x_4 + x_5 - x_6 = x_4 + 500 + x_6 - x_6 = x_4 + 500$$

$$\text{De (2) : } x_2 = x_3 - x_5 + 100 = x_4 + 500 - 500 - x_6 + 100 = x_4 - x_6 + 100$$

$$\text{De (1) : } x_1 = 100 - x_5 = 100 - 500 - x_6 = -400 - x_6$$

Por lo tanto, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -400 - x_6 \\ x_4 - x_6 + 100 \\ x_4 + 500 \\ x_4 \\ 500 + x_6 \\ x_6 \end{bmatrix}$ $\square$

b) Si $x_4 = 1000$ y $x_6 = 300$, entonces

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -400 - 300 \\ 1000 - 300 + 100 \\ 1000 + 500 \\ 1000 \\ 500 + 300 \\ 300 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -700 \\ 800 \\ 1500 \\ 1000 \\ 800 \\ 300 \end{bmatrix}$$

$x_1 = -700$ significa que en vez de salir 700 mil metros cúbicos por hora del nodo 1, estos deben entrar al nodo, para compensar los 800 mil metros cúbicos por hora que salen $\square$

5

Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ se obtiene el mensaje codificado $\bar{x}$ y si se usa la matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ se obtiene $\bar{y}$.

Si $\bar{x} + \bar{y} = \begin{bmatrix} 50 & 45 & 56 \\ 62 & 9 & 92 \\ 32 & 82 & 36 \\ 24 & 86 & 20 \\ 32 & -16 & 64 \end{bmatrix}$, entonces muestre que el mensaje original contiene una U

Solución:

Sea $\bar{z}$ el mensaje decodificado, luego

$$\bar{z}A = \bar{x} \quad (1)$$

$$\bar{z}B = \bar{y} \quad (2)$$

De (1) + (2) se tiene

$$\bar{z}(A+B) = \bar{x} + \bar{y} \Rightarrow \bar{z} = (\bar{x} + \bar{y})(A+B)^{-1}$$

$$\text{Ahora : } A+B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{y } (A+B)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{5}{12} \end{bmatrix}$$

Por lo tanto,

$$\bar{z} = (\bar{x} + \bar{y})(A+B)^{-1} = \begin{bmatrix} 50 & 45 & 56 \\ 62 & 9 & 92 \\ 32 & 82 & 36 \\ 24 & 86 & 20 \\ 32 & -16 & 64 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{5}{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 22 & 5 \\ 23 & 16 & 0 \\ 9 & 14 & 21 \\ 5 & 14 & 21 \\ 16 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Recordemos que la tabla de equivalencias es :

$$\begin{bmatrix} 0 = \text{espacio} & 7 = G & 14 = N & 21 = T \\ 1 = A & 8 = H & 15 = \tilde{N} & 22 = U \\ 2 = B & 9 = I & 16 = O & 23 = V \\ 3 = C & 10 = J & 17 = P & 24 = W \\ 4 = D & 11 = K & 18 = Q & 25 = X \\ 5 = E & 12 = L & 19 = R & 26 = Y \\ 6 = F & 13 = M & 20 = S & 27 = Z \end{bmatrix}$$

El mensaje es *NUEVO INTENTO* que efectivamente posee una *U*. ☐

Obtenga el mensaje

$[21, 2, 13, 12, 59, 87, 41, -18, 21, -2, 31, 5, -3, 35, 29, 27, 1, 81, 2, -1, 1],$

decodificándolo con $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

Solución:

Recordemos que la tabla de equivalencias es :

$0 = \text{espacio}$	$7 = G$	$14 = N$	$21 = T$
$1 = A$	$8 = H$	$15 = \tilde{N}$	$22 = U$
$2 = B$	$9 = I$	$16 = O$	$23 = V$
$3 = C$	$10 = J$	$17 = P$	$24 = W$
$4 = D$	$11 = K$	$18 = Q$	$25 = X$
$5 = E$	$12 = L$	$19 = R$	$26 = Y$
$6 = F$	$13 = M$	$20 = S$	$27 = Z$

Calculemos la inversa de A , usando la fórmula $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{Adj}(A)$, con $\text{Adj}(A) = (c_{ji})$, para decodificar.

$$|A| = 24 - 3 - 4 = 17$$

$$c_{11} = (-1)^{1+1} |A_{11}| = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 12$$

$$c_{21} = (-1)^{2+1} |A_{21}| = - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4$$

$$c_{31} = (-1)^{3+1} |A_{31}| = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -3$$

$$c_{12} = (-1)^{1+2} |A_{12}| = - \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 4$$

$$c_{22} = (-1)^{2+2} |A_{22}| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 7$$

$$c_{32} = (-1)^{3+2} |A_{32}| = - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

$$c_{13} = (-1)^{1+3} |A_{13}| = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -3$$

$$c_{23} = (-1)^{2+3} |A_{23}| = - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

$$c_{33} = (-1)^{3+3} |A_{33}| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 5$$

$$\text{Luego, } A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{Adj}(A) = \frac{1}{17} \begin{bmatrix} 12 & 4 & -3 \\ 4 & 7 & -1 \\ -3 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

(Observemos que si A es simétrica, entonces A^{-1} también lo es. Esta propiedad nos habría ahorrado el cálculo de algunos elementos, por ejemplo, $c_{12} = c_{21} = 4$)

Decodifiquemos a continuación.

$$\frac{1}{17} \begin{bmatrix} 21 & 2 & 13 \\ 12 & 59 & 87 \\ 41 & -18 & 21 \\ -2 & 31 & 5 \\ -3 & 35 & 29 \\ 27 & 1 & 81 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 & 4 & -3 \\ 4 & 7 & -1 \\ -3 & -1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 5 & 0 \\ 7 & 22 & 20 \\ 21 & 1 & 0 \\ 5 & 12 & 0 \\ 1 & 12 & 7 \\ 5 & 2 & 19 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Usando la tabla de equivalencias, concluimos que el mensaje completo es : ME GUSTA EL ALGEBRA ☐

Muestre que el mensaje codificado

$[4, 32, 36, -2, 30, 19, 15, -30, 65, 1, -2, 55, 11, 30, 19]$,

usando $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, contiene exactamente 6 vocales

Solución:

Tenemos que

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Luego

$$\begin{bmatrix} 4 & 32 & 36 \\ -2 & 30 & 19 \\ 15 & -30 & 65 \\ 1 & -2 & 55 \\ 11 & 30 & 19 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 20 & 21 \\ 1 & 13 & 16 \\ 20 & 0 & 5 \\ 14 & 0 & 3 \\ 1 & 26 & 16 \end{bmatrix}$$

Recordemos que la tabla de equivalencias es :

$$\begin{bmatrix} 0 = \text{espacio} & 7 = G & 14 = N & 21 = T \\ 1 = A & 8 = H & 15 = \tilde{N} & 22 = U \\ 2 = B & 9 = I & 16 = O & 23 = V \\ 3 = C & 10 = J & 17 = P & 24 = W \\ 4 = D & 11 = K & 18 = Q & 25 = X \\ 5 = E & 12 = L & 19 = R & 26 = Y \\ 6 = F & 13 = M & 20 = S & 27 = Z \end{bmatrix}$$

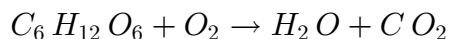
El mensaje es

$[5, 20, 21, 1, 13, 16, 20, 0, 5, 14, 0, 3, 1, 26, 16] = \text{ESTAMOS EN MAYO}$

que posee exactamente 6 vocales ☐

12 c)

Usando sistemas de ecuaciones lineales, balancee la ecuación química siguiente

**Solución:**

Multiplicando cada compuesto por una incógnita, tenemos que

$$x (C_6 H_{12} O_6) + y (O_2) \rightarrow z(H_2 O) + w(C O_2) \Rightarrow$$

$$C : 6x - w = 0$$

$$H : 12x - 2z = 0$$

$$O : 6x + 2y - z - 2w = 0$$

Escribamos el sistema anterior en forma matricial

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 12 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow F_{13} \begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 & -2 & 0 \\ 12 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow F_1(-2) + F_2; F_1(-1) + F_3 \begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow F_{32}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow F_2(-2) + F_3 \begin{pmatrix} x & y & z & w \\ 6 & 2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$r_A = 3 = r_{Ab} < N = 4 \Rightarrow \text{existen infinitas soluciones}$$

Fijemos w

$$-2z + 2w = 0 \Rightarrow z = w$$

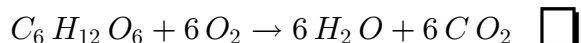
$$-2y + z + w = 0 \Rightarrow 2y = z + w \Rightarrow 2y = 2w \Rightarrow y = w$$

$$6x + 2y - z - 2w = 0 \Rightarrow 6x = z + 2w - 2y \Rightarrow 6x = w + 2w - 2w \Rightarrow 6x = w \Rightarrow$$

$$x = \frac{w}{6}$$

Debemos elegir un valor de $w \in \mathbb{N}$ de modo que las otras variables sean enteras positivas. Si $w = 6$, entonces $x = 1$, $y = 6$ y $z = 6$

Finalmente, la ecuación balanceada es



13

Obtenga la ecuación de la cónica que pasa por los puntos $(0,0)$, $(1,0)$, $(2,1)$, $(-1,2)$ y $(-1,-1)$

Solución:

Tenemos que la ecuación general de una sección cónica es

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Reemplazando las coordenadas de los puntos dados, en la ecuación anterior se tiene que

Para $(0,0)$: $F = 0$

Para $(1,0)$: $A + D + F = 0$

Para $(2,1)$: $4A + 2B + C + 2D + E + F = 0$

Para $(-1,2)$: $A - 2B + 4C - D + 2E + F = 0$

Para $(-1,-1)$: $A + B + C - D - E + F = 0$

Dado que $F = 0$, el sistema anterior se reduce a

$$A + D = 0$$

$$4A + 2B + C + 2D + E = 0$$

$$A - 2B + 4C - D + 2E = 0$$

$$A + B + C - D - E = 0$$

En la forma matricial $Ax = b$

$$\begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 4 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Este sistema es homogéneo, es decir, posee solución.
Usemos el método de Gauss

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right] \rightarrow F_1(-4)+F_2; F_1(-1)+F_3; F_1(-1)+F_4$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -1 & 0 \end{array} \right] \rightarrow F_{24}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right] \rightarrow F_2(2)+F_3; F_2(-2)+F_4$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right] \rightarrow F_{34}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -6 & 0 & 0 \end{array} \right] \rightarrow F_3(6)+F_4$$

$$\begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 18 & 0 \end{array} \right] \end{array}$$

Como existen infinitas soluciones, debemos fijar una incógnita. Fijemos E

$$6D + 18E = 0 \Rightarrow 6D = -18E \Rightarrow D = -3E$$

$$-C + 2D + 3E = 0 \Rightarrow C = 2D + 3E \Rightarrow C = -6E + 3E \Rightarrow C = -3E$$

$$B + C - 2D - E = 0 \Rightarrow B = 2D + E - C \Rightarrow B = -6E + E + 3E \Rightarrow B = -2E$$

$$A + D = 0 \Rightarrow A = -D \Rightarrow A = 3E$$

Ahora si consideramos que $E = 1$, entonces $A = 3$, $B = -2$, $C = -3$, $D = -3$ y $F = 0$

Esto significa que la ecuación de la cónica buscada es

$$3x^2 - 2xy - 3y^2 - 3x + y = 0 \quad \square$$

17

Usando el método de mínimos cuadrados obtenga la recta de regresión lineal para los datos

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
y_i	15	5	18	10	12	8	14	6

Solución:

Recordemos que la recta $y = a + bx$ de mejor ajuste tendrá coeficientes a y b dados por $\mathbf{v} = (A^T A)^{-1} A^T \mathbf{y}$, donde

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}_{2 \times 1}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ 1 & x_n \end{bmatrix}_{n \times 2}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{bmatrix}_{n \times 1}$$

$$\text{Es decir, } n = 8, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}_{2 \times 1}, A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \\ 1 & 6 \\ 1 & 7 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}, \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 15 \\ 5 \\ 18 \\ 10 \\ 12 \\ 8 \\ 14 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \\ 1 & 6 \\ 1 & 7 \\ 1 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 36 \\ 36 & 204 \end{bmatrix}$$

$$(A^T A)^{-1} = \frac{1}{1632-1296} \begin{bmatrix} 204 & -36 \\ -36 & 8 \end{bmatrix} = \frac{1}{336} \begin{bmatrix} 204 & -36 \\ -36 & 8 \end{bmatrix}$$

$$(A^T A)^{-1} A^T =$$

$$\frac{1}{336} \begin{bmatrix} 204 & -36 \\ -36 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{336} \begin{bmatrix} 168 & 132 & 96 & 60 & 24 & -12 & -48 & -84 \\ -28 & -20 & -12 & -4 & 4 & 12 & 20 & 28 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = (A^T A)^{-1} A^T \mathbf{y} =$$

$$\frac{1}{336} \begin{bmatrix} 168 & 132 & 96 & 60 & 24 & -12 & -48 & -84 \\ -28 & -20 & -12 & -4 & 4 & 12 & 20 & 28 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15 \\ 5 \\ 18 \\ 10 \\ 12 \\ 8 \\ 14 \\ 6 \end{bmatrix} = \frac{1}{336} \begin{bmatrix} 4524 \\ -184 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{4524}{336} \\ -\frac{184}{336} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 13.46428571 \\ -0.547619047 \end{bmatrix}$$

La recta de regresión lineal es $y = \frac{4524}{336} - \frac{184}{336} x$ $\square$

19

Decodifique el mensaje :

$[-15; -10; 25; -25; 1; 19; -2; -28; 30; -36; 11; 4; 9; -35; 17; -18; -2; 20]$

que se obtuvo con $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, usando para calcular la inversa

a) operaciones elementales

b) la adjunta

Solución:

Notemos que : $|A| = 0 + 2 - 1 - 0 - 1 + 2 = 2 \neq 0$, esto significa que A^{-1} existe.

Calculemos la inversa de A usando :

a) operaciones elementales

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & : & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & : & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & : & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow F_1(1)+F_2; F_1(1)+F_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & : & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & : & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow F_2(-1/2) \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & : & -1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & : & 1 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\rightarrow F_2(1)+F_3 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & : & -1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & : & 1/2 & -1/2 & 1 \end{array} \right] \rightarrow F_3(-1)$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & : & -1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & : & -1/2 & 1/2 & -1 \end{array} \right] \rightarrow F_3(1)+F_2; F_3(-1)+F_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & : & 3/2 & -1/2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & : & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & : & -1/2 & 1/2 & -1 \end{array} \right] \rightarrow F_2(2)+F_1 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & : & -1/2 & -1/2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & : & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & : & -1/2 & 1/2 & -1 \end{array} \right]$$

$$\therefore A^{-1} = \begin{bmatrix} -1/2 & -1/2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1/2 & 1/2 & -1 \end{bmatrix}$$

b) adjunta

$$c_{11} = (-1)^{1+1} |A_{11}| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

$$c_{12} = (-1)^{1+2} |A_{12}| = - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -(1+1) = -2$$

$$c_{13} = (-1)^{1+3} |A_{13}| = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$c_{21} = (-1)^{2+1} |A_{21}| = - \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -(2-1) = -1$$

$$c_{22} = (-1)^{2+2} |A_{22}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -1+1 = 0$$

$$c_{23} = (-1)^{2+3} |A_{23}| = - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -(1-2) = 1$$

$$c_{31} = (-1)^{3+1} |A_{31}| = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$c_{32} = (-1)^{3+2} |A_{32}| = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -(1+1) = -2$$

$$c_{33} = (-1)^{3+3} |A_{33}| = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -2$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{Adj}(A) = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 & -1/2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1/2 & 1/2 & -1 \end{bmatrix}$$

Decodifiquemos el mensaje.

$$M_0 = M_c A^{-1} \Rightarrow$$

$$M_0 = \begin{bmatrix} -15 & -10 & 25 \\ -25 & 1 & 19 \\ -2 & -28 & 30 \\ -36 & 11 & 4 \\ 9 & -35 & 17 \\ -18 & -2 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/2 & -1/2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1/2 & 1/2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 20 & 0 \\ 2 & 22 & 5 \\ 14 & 16 & 0 \\ 5 & 20 & 21 \\ 22 & 4 & 9 \\ 1 & 19 & 0 \end{bmatrix}$$

Usando la tabla de equivalencias

$0 = \text{espacio}$	$7 = G$	$14 = N$	$21 = T$
$1 = A$	$8 = H$	$15 = \tilde{N}$	$22 = U$
$2 = B$	$9 = I$	$16 = O$	$23 = V$
$3 = C$	$10 = J$	$17 = P$	$24 = W$
$4 = D$	$11 = K$	$18 = Q$	$25 = X$
$5 = E$	$12 = L$	$19 = R$	$26 = Y$
$6 = F$	$13 = M$	$20 = S$	$27 = Z$

se tiene que el mensaje es : *ES BUENO ESTUDIAR* 

RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS NO RESUELTOS APLICACIONES

[8]

Si $c_1 \neq 0$, entonces el sistema no posee solución.

Si $c_1 = 0$, entonces el sistema posee infinitas soluciones

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_5 \\ x_5 \\ c_2 + x_5 \\ c_2 \\ x_5 \end{pmatrix}, x_5 \in \mathbb{R}$$

[9]

DEBO ESTUDIAR TODOS LOS DIAS

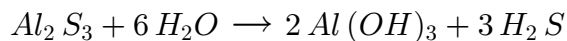
[10]

EXITO, que incluye una T

[11]

[41, 7, 42, - 40, 26, 24, 9, 38, 52, 12, 27, - 6, 62, 35, 9, 61, 28, 6, 1
7, 42, 65, 15, 36, - 12, 10, 11, 8, 3]

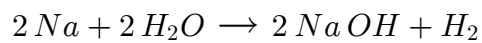
[12a)]



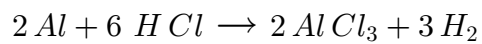
[12b)]



[12d)]



[12e)]



[14]

Por ejemplo: $6x^2 + 4xy - y^2 - 22x + y + 12 = 0$

[15]

$$17x^2 + 17y^2 - 11x - 123y + 100 = 0$$

[16]

$$y = \frac{7324}{345} - \frac{186}{115}x$$

[18]

$$y = \frac{3}{4} - \frac{15}{4}x$$

BIBLIOGRAFÍA

[1] Devaud, Gloria y Otras. (1996) *"Álgebra Lineal"*.
Universidad de Concepción.

[2] Devaud, Gloria y Erpelding, María Teresa. (1998)
"Problemas Resueltos y Propuestos de Álgebra y Álgebra Lineal".
Universidad de Concepción.

[3] Grossman, S. I. & Flores, J. J. (2008). *Álgebra lineal* (6.^a ed.). McGraw-Hill Interamericana.

[4] Larson, Ron. (2017). *Elementary Linear Algebra* (8.^a ed.).
Cengage Learning.